UNIDADE 3

Probabilidade

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC:

Competências gerais: 2 e 5

Matemática e suas Tecnologias

Competências específicas: 1, 3 e 5

Habilidades: EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT511

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

Competência específica: 2

O texto integral das competências e das habilidades citadas encontra-se no final deste livro do estudante.

Meteorologia

Ao sair de casa amanhã logo cedo, devo levar o guarda-chuva? Deve chover nos próximos meses para que o agricultor faça o plantio? Há risco de chuva forte nas próximas horas; será que pode ocasionar enchente ou alagamento em alguma região?

Esses questionamentos são frequentes em nosso cotidiano, o que nos leva a fazer uma breve busca para ver a previsão do tempo e a probabilidade de chover em certa região, por exemplo. Atualmente, essas pesquisas podem ser realizadas a qualquer momento e em diferentes dispositivos. Mas você sabe como são feitos os estudos que nos fornecem a previsão do tempo? Leia o texto a seguir.

> [...] A partir do recolhimento de informações sobre a umidade do ar, pressão atmosférica, temperatura do ar, volume de chuva, entre outras, os meteorologistas, profissionais formados no curso de ensino superior em meteorologia, conseguem traçar uma previsão da condição do clima para determinada região.
>
> A previsão do tempo é ferramenta essencial no desenvolvimento econômico do país: na agricultura, na geração de energia em usinas hidrelétricas, que dependem do volume de água, e nas mais diversas atividades econômicas. [...]

Conexões

Acesse este vídeo para obter mais informações sobre como é realizada a previsão do tempo:

- COMO É feita a previsão do tempo. 2012. Vídeo (10min19s). Publicado pelo canal Nova Escola. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=FGFxUC_IMO4&feature=youtu.be. Acesso em: 29 jun. 2020.

» Pedestres atravessando cruzamento da Avenida Afonso Pena com a Avenida Amazonas em dia chuvoso. Belo Horizonte (MG). Fotografia de 2015.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens abaixo.

- Você tem o hábito de pesquisar a previsão do tempo? Por quê? Quais dispositivos você utiliza?
- Em sua opinião, a meteorologia colabora para melhorar a qualidade de vida da sociedade? Justifique.
- Pesquise qual a probabilidade de chuva para o dia de amanhã na região em que você mora. De acordo com essa informação, responda: é mais provável que chova ou que não chova? Justifique.

Veja os comentários sobre a abordagem desses itens nas **Orientações para o professor**.

Ao longo do tempo, os instrumentos utilizados pelos meteorologistas foram se desenvolvendo e, com eles, a precisão das previsões do tempo foi melhorada em níveis exponenciais. Entre esses instrumentos, podemos citar o higrômetro, criado ainda na Idade Média, o cata-vento de Leonardo da Vinci, o termômetro de Galileu Galilei e o barômetro de Evangelista Torricelli. Ao longo do século XX, a melhoria nas técnicas e a precisão dos dados, fato ocasionado, sobretudo, pela obtenção de imagens de satélite, vêm creditando à ciência meteorológica uma precisão cada vez maior, o que favorece as ações humanas e proporciona melhorias na qualidade de vida da sociedade.

[...]

CREA-SE. **A importância da meteorologia vai muito além de saber "se vai chover hoje"**. Sergipe, 23 mar. 2015. Disponível em: www.crea-se.org.br/a-importancia-da-meteorologia-vai-muito-alem-de-saber-se-vai-chover-hoje/. Acesso em: 29 jun. 2020.

EVGENY KARANDAEV/SHUTTERSTOCK.COM

Observe no esquema algumas informações sobre como é realizada a previsão do tempo.

Medições iniciais
Para realizar a previsão do tempo, é necessário efetuar medições do tempo no presente, como umidade, pressão atmosférica, temperatura de superfície, precipitação etc.

Estações meteorológicas
A coleta de informações começa em terra, nas estações meteorológicas. Como é preciso saber as condições do tempo em vários pontos do planeta, há cerca de 10 000 estações dessas espalhadas por todo o mundo.

Modelos matemáticos
Com esse conjunto de dados, é possível compor modelos matemáticos com o objetivo de prever, com certa confiabilidade, as condições climáticas futuras. Por isso, quanto mais precisas as medidas coletadas, melhores são os resultados da previsão. Com essas informações calculadas e analisadas, os meteorologistas, usando supercomputadores, realizam as previsões.

Outros recursos
Como não há estações meteorológicas em toda a superfície do planeta Terra, são também usados outros recursos, como aviões, navios, boias e satélites para obter informações sobre as condições do tempo em diferentes localidades.

Disponibilização da previsão do tempo
Os dados da previsão do tempo são disponibilizados por meio de empresas de meteorologia, privadas ou públicas, que fazem boletins meteorológicos, ou, ainda, por meio de *sites*, aplicativos de *smartphones*, emissoras de TV, de maneira que os leigos consigam compreender tais previsões.

ILUSTRAÇÕES FABIO EUGENIO

Fonte dos dados: ALVES, G. Matemática ajuda a entender por que a previsão do tempo às vezes erra. **Folha de S.Paulo**, São Paulo, 3 mar. 2019. Disponível em: www1.folha.uol.com.br/ciencia/2019/03/matematica-ajuda-a-entender-por-que-a-previsao-do-tempo-as-vezes-erra.shtml. Acesso em: 29 jun. 2020.

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas **3** e **5** e das habilidades **EM13MAT311** e **EM13MAT511** da área de Matemática e suas Tecnologias.

O estudo da probabilidade

CPTEC-INPE

» No *site* do CPTEC disponível em <www.cptec.inpe.br> (acesso em: 27 jul. 2020), é possível realizar pesquisas da previsão de tempo, por período, dos municípios brasileiros.

Na abertura desta Unidade, vimos algumas informações sobre os estudos meteorológicos. Atualmente, podemos acessar previsões meteorológicas atualizadas por meio de diversos aplicativos ou *sites*, como o do Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPTEC), onde é possível consultar informações relacionadas a previsões do tempo e do clima. Observe ao lado.

Note que algumas informações meteorológicas envolvem a ideia de probabilidade. Além da meteorologia, a probabilidade também é aplicada à outras áreas. Por exemplo, no controle de qualidade de uma produção industrial (engenharia), na análise genética (medicina), na avaliação de variedades de plantas (agricultura) e na previsão de riscos em investimentos financeiros (economia).

Você sabia que alguns registros evidenciam que o início do estudo sistematizado de probabilidade está relacionado à discussão em torno de jogos de azar?

Matemática na História


LEEMAGE/CORBIS VIA GETTY IMAGES

» Blaise Pascal (1623-1662).


CULTURE CLUB/ GETTY IMAGES

» Pierre de Fermat (1601-1665).

Apesar de as ideias relacionadas à probabilidade remeterem à Antiguidade, há evidências de que não tenha ocorrido tratamento matemático sistematizado da probabilidade até por volta do século XV e início do século XVI. O desenvolvimento das bases da teoria das probabilidades é creditado aos matemáticos Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), a partir de correspondências que trocaram a respeito de um problema envolvendo jogos de azar, conhecido como "problema dos pontos". Porém, Girolamo Cardano (1501-1576), antecessor de Pascal e Fermat, também abordou algumas questões relacionadas à probabilidade, inclusive desse mesmo problema, apresentadas em um manual de jogos, que foi publicado apenas em 1663.

Fonte dos dados: EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 365-366.

Nesta Unidade, retomaremos e ampliaremos o estudo sobre probabilidade realizado no Ensino Fundamental.

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Resposta esperada: Aquilo que depende do acaso.

Para pensar

Você conhece o significado da palavra "aleatório"? Se necessário, pesquise em um dicionário.

Há experimentos ou fenômenos que, apesar de repetidos sob as mesmas condições, é impossível prever o resultado antecipadamente e com certeza. Por exemplo, o lançamento de um dado comum ou o sorteio de uma loteria. Situações como essas são denominadas **experimentos aleatórios**.

Agora, considere a seguinte situação.

No popular jogo de palitos para dois participantes, cada um deles recebe três palitos e, sem que o outro veja, esconde parte dessa quantidade de palitos em uma das mãos, que é colocada fechada sobre uma mesa. Cada participante, na sua vez, tem de tentar adivinhar a quantidade total de palitos nas duas mãos sobre a mesa. O ganhador da rodada é aquele que acertar esse total. A seguir estão apresentadas todas as possíveis maneiras com as quais esses participantes podem esconder os palitos.

		Participante II			
		0	**1**	**2**	**3**
Participante I	**0**	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)
	1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
	2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
	3	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

» Jogo de palitos com dois participantes.

DOTTA2

Assim, temos 16 maneiras possíveis que definem o que denominamos de **espaço amostral**.

Experimento aleatório é todo experimento (ou fenômeno) que, mesmo repetido sob as mesmas condições, apresenta resultado imprevisível.

Em um experimento aleatório, denominamos **espaço amostral**, indicado por Ω (lê-se: ômega), o conjunto formado por todos os resultados possíveis. Cada subconjunto do espaço amostral é denominado **evento**.

Em relação à situação apresentada, do jogo de palitos, temos que o espaço amostral é dado por $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Podemos indicar, por exemplo, o evento A em que os participantes têm a mesma quantidade de palitos escondidos, ou seja, $A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Analise outros exemplos.

I. Em um sorteio, ao acaso, de uma letra do nosso alfabeto, o espaço amostral é dado por:

$\Omega = \{a, b, c, d, e, ..., v, w, x, y, z\}$

Considerando A o evento "sortear uma vogal", temos:

$A = \{a, e, i, o, u\}$

ALAN CARVALHO

II. No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é dado por:

$\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$

Considerando B o evento "obter cara" em um lançamento da moeda, temos:

$B = \{\text{cara}\}$

Nesse caso, como um único elemento pertence ao evento B, dizemos que esse é um evento simples ou evento unitário.


INAPLUS/SHUTTERSTOCK.COM

Lançamento de uma moeda.

III. Na anotação do número obtido na face superior de um dado comum após lançá-lo, o espaço amostral é dado por:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Considerando C o evento "obter um número natural menor do que 7", temos:

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Nesse caso, como todos os elementos do espaço amostral pertencem ao evento C, dizemos que esse é um evento certo.


LUCAS FARAUJ

IV. No sorteio, ao acaso, de um estado da região Norte do Brasil, o espaço amostral é dado por:

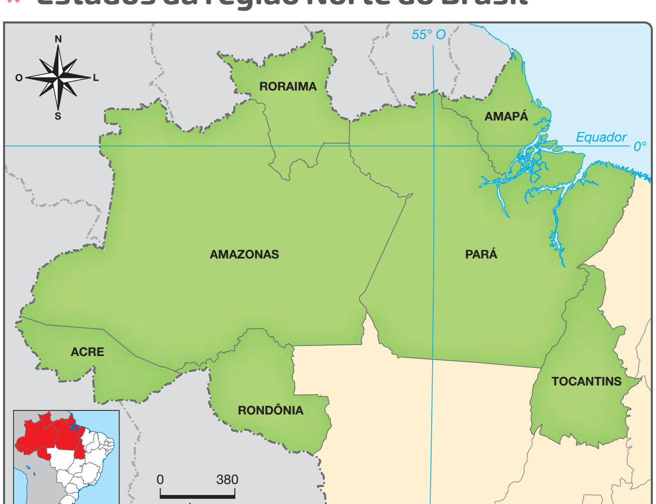
$\Omega = \{\text{Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins}\}$.

Considerando D o evento correspondente a sortear um estado da região Norte do Brasil cuja letra inicial do nome seja **B**, temos:

$D = \varnothing$

Nesse caso, como nenhum elemento pertence ao evento D, dizemos que esse é um evento impossível.

» Estados da região Norte do Brasil



DACOSTA MAPAS

Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 94.

Para pensar

Junte-se a um colega e criem contextos descrevendo experimentos aleatórios. Depois, estabeleçam exemplos de eventos. Por fim, compartilhem o que vocês criaram em um roda de conversa.

Resposta pessoal.

Denominamos **evento simples** (ou **unitário**) o evento que é formado apenas por um elemento do espaço amostral. Quando o evento corresponde ao próprio espaço amostral, denominamos **evento certo** e, quando o evento é representado pelo conjunto vazio, ou seja, não pertence a ele elemento algum, este é denominado **evento impossível**.

Agora, considere a situação descrita a seguir.

Para a realização de um experimento, foram escritos em fichas idênticas todos os números de dois algarismos distintos que podem ser formados pelos algarismos 2, 5, 7 ou 9. Em seguida, essas fichas foram colocadas em uma sacola de tecido não transparente e, sem que se olhe dentro dela, uma ficha será sorteada.

ALAN CARVALHO

Em relação à situação apresentada, temos que o espaço amostral pode ser indicado por $\Omega = \{25, 27, 29, 52, 57, 59, 72, 75, 79, 92, 95, 97\}$. Além disso, podemos destacar o evento A correspondente a sortear uma ficha que contém um número múltiplo de 3, e o evento B, de sortear uma ficha que contém um número maior ou igual a 79. Assim, temos:

- $A = \{27, 57, 72, 75\}$;
- $B = \{79, 92, 95, 97\}$.

Note que os eventos A e B não possuem elemento em comum. Nesse caso, dizemos que A e B são eventos mutuamente exclusivos.

Dados dois eventos A e B, eles são denominados **eventos mutuamente exclusivos** quando não possuem elemento em comum, ou seja, $A \cap B = \varnothing$.

Atividades resolvidas

R1. Em uma brincadeira são lançados dois dados: um dado branco com formato que lembra um cubo numerado de 1 a 6, e um dado azul com formato que lembra um tetraedro regular, numerado de 1 a 4. Esses dois dados são lançados simultaneamente e um número é formado com os resultados verificados. O algarismo obtido no dado branco indica a dezena, e o algarismo obtido no dado azul indica a unidade desse número. Por exemplo, os lançamentos representados ao lado indicam o número 24.


LUCAS FARAUJ

Com base nessas informações, determine:

a) o espaço amostral dessa brincadeira;

b) o evento A que corresponde à formação de um número par;

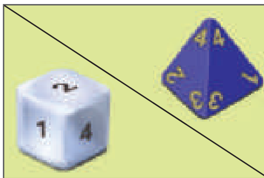
c) o evento B que corresponde à formação de um número maior do que 50;

d) o evento C que corresponde à formação de um número com dois algarismos iguais.

Resolução

Podemos construir uma tabela de dupla entrada para representar todos os números possíveis de serem formados nessa brincadeira.

LUCAS FARAUJ

	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44
5	51	52	53	54
6	61	62	63	64

a) $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64\}$
b) $A = \{12, 14, 22, 24, 32, 34, 42, 44, 52, 54, 62, 64\}$
c) $B = \{51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64\}$
d) $C = \{11, 22, 33, 44\}$

R2. A cantina de certa escola oferece um combo de lanche com um copo de suco de uva ou laranja e um pão de queijo no valor de R$ 12,00. Porém, os estudantes podem:

- trocar o copo de suco de uva ou laranja por um copo de suco de abacaxi por mais R$ 1,50;
- trocar o pão de queijo por um sanduíche natural por mais R$ 5,00.

Para pensar R$ 18,50

Nessa cantina, quanto custa um combo formado por um copo de suco de abacaxi e um sanduíche natural?

Determine o espaço amostral com os preços do combo correspondentes a todas as opções de escolha dos estudantes.

Resolução

Podemos construir uma árvore de possibilidades para representar todas as opções de escolha dos estudantes para compor um combo.

1 Suco de uva
- pão de queijo → suco de uva e pão de queijo: R$ 12,00
- sanduíche natural → suco de uva e sanduíche natural: R$ 17,00

2 Suco de laranja
- pão de queijo → suco de laranja e pão de queijo: R$ 12,00
- sanduíche natural → suco de laranja e sanduíche natural: R$ 17,00

3 Suco de abacaxi
- pão de queijo → suco de abacaxi e pão de queijo: R$ 13,50
- sanduíche natural → suco de abacaxi e sanduíche natural: R$ 18,50

EDITORIA DE ARTE

Assim, o espaço amostral é dado por $\Omega = \{$R$ 12,00, R$ 13,50, R$ 17,00, R$ 18,50$\}$.

3. a) proposta **I**: $\Omega = \{EE, ES, EC, SS, SE, SC, CC, CE, CS\}$; proposta **II**: $\Omega = \{ES, EC, SE, SC, CE, CS\}$
3. b) proposta **I**: $A = \{EE, ES, EC, SE, CE\}$, $B = \{EE, SS, CC\}$; proposta **II**: $A = \{ES, EC, SE, CE\}$, $B = \varnothing$

Atividades

Não escreva no livro

1. Identifique quais dos itens a seguir apresentam experimentos (ou fenômenos) aleatórios. a; c

a) Duzentos bilhetes idênticos, diferenciando-se apenas pela numeração, foram colocados em uma urna para que um deles fosse sorteado.

b) Aquecer a água pura no nível do mar e verificar a que temperatura ela entrará em ebulição.

c) Contagem da quantidade de artefatos defeituosos em um intervalo de duas horas na linha de produção de uma fábrica.

d) Registrar o tempo em que um relógio em bom funcionamento demora para que o ponteiro maior complete uma volta.

2. Considere que duas moedas idênticas e perfeitas são lançadas simultaneamente e verifica-se qual face de cada uma delas ficou voltada para cima: cara ou coroa.

a) Escreva o espaço amostral desse experimento.

b) Determine o evento *A* correspondente a obter exatamente duas coroas nesse experimento e o evento *B*, de obter apenas uma cara.

3. Para a realização de duas atividades escolares, uma pesquisa e um seminário, serão sorteados um dos seguintes temas: Educação (E), Saúde (S) ou Cultura (C). Nesse sorteio, cada tema deve ser escrito em pedaços de papel idênticos, colocados em uma caixa e, sem que se olhe, o primeiro papel sorteado indicará o tema da pesquisa e o segundo, o tema do seminário. Para esse sorteio foram propostas duas maneiras diferentes, conforme segue.

- Proposta **I**: o papel do primeiro tema sorteado é devolvido à caixa para o segundo sorteio.

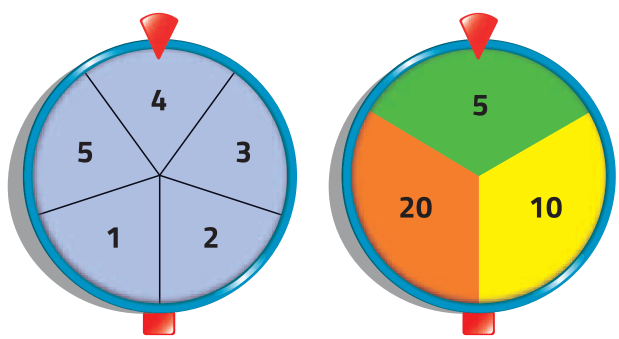
- Proposta **II**: o primeiro papel sorteado não é recolocado na caixa.

a) Qual é o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis dos sorteios em relação à proposta **I**? E em relação à proposta **II**?

2. a) Considerando C a obtenção de cara e K, de coroa, temos $\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$.
2. b) $A = \{KK\}$; $B = \{CK, KC\}$

b) Para cada proposta, determine o evento *A* que corresponde ao sorteio do tema Educação para ao menos uma das atividades e o evento *B*, o sorteio do mesmo tema para ambas as atividades.

4. Na promoção de certa loja, quando um cliente realiza uma compra acima de R$ 200,00, ele gira duas roletas e ganha um cupom de desconto. O valor desse cupom corresponde ao produto dos números indicados nas roletas, em reais. Observe.



BENTINHO

Dica

Cada roleta foi dividida em partes iguais.
No exemplo acima, o valor do cupom corresponde a R$ 20,00, pois $4 \cdot 5 = 20$.

a) Quantas são as composições de multiplicação possíveis de serem obtidas nesse sorteio? Se necessário, construa uma árvore de possibilidades. 15 composições

b) Determine o espaço amostral com todas as opções de valores do cupom de desconto. Resposta nas **Orientações para o professor**.

c) Escreva o conjunto que representa o evento:

- *A* de sortear um cupom de desconto cujo valor seja maior ou igual a R$ 40,00;
- *B* de sortear um cupom de desconto cujo valor seja maior do que R$ 60,00 e menor do que R$ 80,00.
- *C* de sortear um cupom de desconto cujo valor, em reais, seja múltiplo de 5;
- *D* de sortear um cupom de desconto cujo valor seja menor do que R$ 10,00;
- *E* de sortear um cupom de desconto cujo valor esteja entre R$ 10,00 e R$ 30,00.

4. c) Respostas nas **Orientações para o professor**.

5. Com base no item **c** da atividade **4**, responda aos itens a seguir.
   a) Quais pares desses eventos, não vazios, são mutuamente exclusivos? *A* e *D*; *A* e *E*; *D* e *E*
   b) Classifique os eventos *B*, *C* e *D* em simples, certo ou impossível. *B*: impossível; *C*: certo; *D*: simples

6. Considere um experimento em que ocorre o lançamento simultâneo de uma moeda comum e um dado com formato que lembra um dodecaedro regular, com as faces numeradas de 1 a 12. Em relação ao espaço amostral desse experimento, podemos afirmar que é um evento impossível de ocorrer: alternativa **b**
   a) cara na moeda e um número ímpar no dado;
   b) coroa na moeda e um número maior do que 12 no dado;
   c) cara na moeda e um número primo no dado;
   d) coroa na moeda e um número par menor do que 5 no dado.

7. Observe a seguir informações sobre dois tipos de espaços amostrais.

Espaço amostral discreto: todo espaço amostral formado por um conjunto finito ou infinito de resultados contáveis. Exemplo:
- lançar uma moeda comum e registrar qual face fica voltada para cima.

Espaço amostral contínuo: todo espaço amostral não contável (não enumerável). Exemplo:
- sortear um número real maior do que 1 e menor do que 2.

Com base nessas informações, descreva um experimento para cada tipo de espaço amostral apresentado. Depois, troque essas descrições com um colega para que ele classifique o espaço amostral de cada experimento em discreto ou contínuo, enquanto você faz o mesmo com as descrições que receber. Por fim, confiram juntos as respostas. Resposta pessoal.

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas **3** e **5** e das habilidades **EM13MAT311** e **EM13MAT511** da área de Matemática e suas Tecnologias; e da competência específica **2** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Cálculo de probabilidade

O dado representado ao lado costuma ser utilizado em alguns jogos de RPG (*Role Playing Game)* – jogos em que os participantes interpretam personagens e, interagindo entre si, criam uma história. Ele tem formato que lembra um tetraedro regular; próximo a cada um de seus vértices, em cada uma das faces, é indicado um número natural de 1 até 4.

Considere um certo experimento aleatório em que esse dado tenha sido lançado 500 vezes e o número obtido no vértice superior foi anotado. Analise a tabela com a frequência absoluta e a frequência relativa dos resultados desses lançamentos.


TIMQUO/SHUTTERSTOCK.COM

» Dado de 4 faces. Nos chamados RPG de mesa podem ser usados diferentes tipos de dados.

» Resultado do experimento aleatório

Número obtido	Frequência absoluta (*f*)	Frequência relativa (*fr*)
1	124	0,248 ou 24,8%
2	132	0,264 ou 26,4%
3	128	0,256 ou 25,6%
4	116	0,232 ou 23,2%
Total	500	1 ou 100%

Fonte: Dados fictícios.

IMAGES72/SHUTTERSTOCK.COM

Note que as frequências relativas correspondentes aos números indicados nos dados são próximas umas das outras. Se aumentarmos a quantidade de lançamentos do dado nesse experimento, a tendência é que as frequências relativas dos números obtidos sejam ainda mais próximas entre si. Nesse caso, dizemos que o espaço amostral nesse experimento aleatório (lançamento desse dado) é um **espaço amostral equiprovável**.

Seja A um evento de um espaço amostral equiprovável Ω, finito e não vazio. Dizemos que a **probabilidade** de ocorrer algum elemento de A, indicada por $P(A)$, é dada pela razão entre a quantidade de elementos de A e de Ω, ou seja:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Retomando o experimento aleatório do lançamento do dado, apresentado anteriormente, temos que o espaço amostral é dado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, sendo o evento $A = \{3\}$, que corresponde à obtenção do número 3 em um lançamento do dado, temos:

$$P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Portanto, a probabilidade de obter o número 3 no lançamento desse dado é de 1 em 4, ou seja, $\frac{1}{4}$, 0,25 ou 25%.

Em um espaço amostral equiprovável, as probabilidades dos eventos simples são todas iguais.

Agora, considere um evento E de um espaço amostral equiprovável Ω, finito e não vazio. Nesse caso, temos:

$$\varnothing \subset E \subset \Omega \Rightarrow n(\varnothing) \leqslant n(E) \leqslant n(\Omega)$$

Como Ω é finito e não vazio, temos $n(\Omega) > 0$. Assim, segue que:

$$\frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(E)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{0}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(E)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow 0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

Dado um evento E de um espaço amostral equiprovável qualquer, finito e não vazio, temos que:

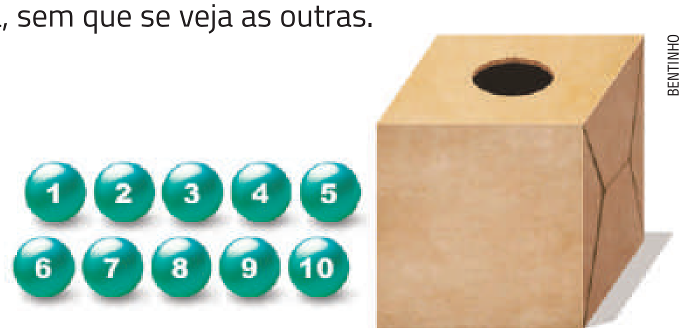
$$0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

ANGELATRIKS/SHUTTERSTOCK.COM

Eventos complementares

Considere a situação descrita a seguir.

Para a realização de um experimento, foram numeradas dez bolas idênticas de 1 a 10, colocadas de maneira aleatória em uma caixa para que uma delas seja sorteada, sem que se veja as outras.



BENTINHO

Incialmente, vamos denominar de Ω o espaço amostral do experimento apresentado, A o evento sorteio de uma bola que contém um número primo e B o evento sorteio de uma bola que não contém um número primo. Assim, temos:

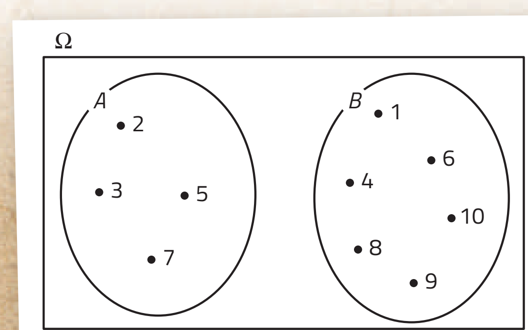
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
- $A = \{2, 3, 5, 7\}$;
- $B = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

Note que os eventos A e B são mutuamente exclusivos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$. Além disso, todo elemento de Ω pertence a B ou pertence a A, ou seja, $A \cup B = \Omega$. Nesse caso, podemos dizer que B é complementar de A em relação a Ω e, reciprocamente, que A é complementar de B em relação a Ω. Dizemos também que A e B são eventos complementares.

Para pensar

$P(\Omega) = P(A) + P(B)$

Calcule $P(\Omega)$, $P(A)$ e $P(B)$. Que relação você pode perceber entre os resultados obtidos?



EDITORIA DE ARTE

Dado um evento A de um espaço amostral equiprovável Ω, finito e não vazio, denominamos **evento complementar** de A em relação a Ω, indicado por $\bar{A}$, o evento formado apenas pelos elementos que pertencem a Ω e que não pertencem a A, ou seja, $\bar{A} = \Omega - A$.

Nesse caso, a probabilidade de ocorrência do evento complementar de A em relação a Ω, indicada por $P(\bar{A})$, é dada por:

$$P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ARIGATO/SHUTTERSTOCK.COM

Atividades resolvidas

R3. Mostre que, dado um espaço amostral equiprovável Ω qualquer, finito e não vazio, temos:

a) se A é um evento impossível qualquer, então $P(A) = 0$;

b) se B é um evento certo qualquer, então $P(B) = 1$.

Resolução

a) Como A é um evento impossível, temos que A não possui elementos, ou seja, $n(A) = 0$. Assim:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0$$

Portanto, $P(A) = 0$.

b) Como B é um evento certo, temos que $B = \Omega$. Assim,

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$$

Portanto, $P(B) = 1$.

R4. No lançamento de um **dado honesto** de seis faces, qual a probabilidade de:

a) obter o número 5?

b) obter um número divisível por 3?

c) não obter um número quadrado perfeito?

VIKTOR FEDORENKO/ SHUTTERSTOCK.COM

» O dado de 6 faces também é chamado de dado simples.

Dado honesto: dado que não tem alteração em suas faces com a finalidade de influenciar os resultados obtidos. Também podemos chamar de dado não viciado ou dado perfeito.

Resolução

Inicialmente, determinamos o espaço amostral, que é dado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Considerando A o evento obter o número 5 no lançamento do dado, temos $A = \{5\}$ e $n(A) = 1$. Logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}167 = 16{,}7\%$$

Portanto, a probabilidade de obter o número 5 é de $\frac{1}{6}$ ou aproximadamente 0,167 ou 16,7%.

b) Considerando B o evento obter um número divisível por 3 no lançamento do dado, temos que $B = \{3, 6\}$ e $n(B) = 2$. Logo:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \simeq 0{,}333 = 33{,}3\%$$

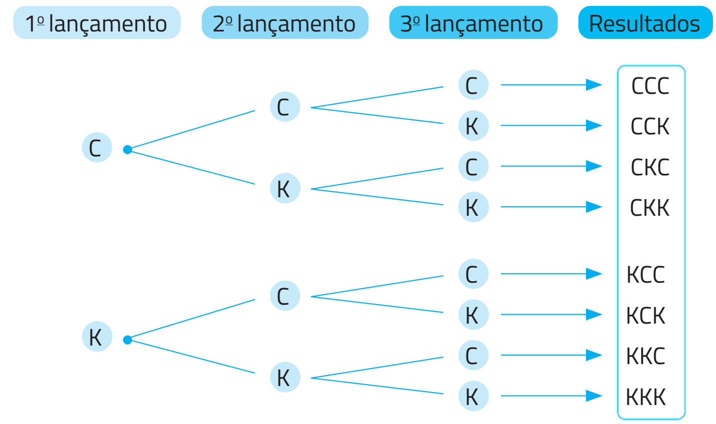
Portanto, a probabilidade de obter um número divisível por 3 é de $\frac{1}{3}$ ou aproximadamente 0,333 ou 33,3%.

c) Considerando C o evento obter um número quadrado perfeito no lançamento do dado, temos $C = \{1, 4\}$ e $n(C) = 2$. Para determinar a probabilidade de não obter um número quadrado perfeito, podemos calcular a probabilidade de ocorrência do evento complementar de C em relação a Ω.

$$P(\bar{C}) = 1 - P(\bar{C}) \Rightarrow P(\bar{C}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \simeq 0{,}667 = 66{,}7\%$$

Portanto, a probabilidade de não obter um número quadrado perfeito é de $\frac{2}{3}$ ou aproximadamente 0,667 ou 66,7%.

R5. Em um experimento, três moedas perfeitas são lançadas simultaneamente e verifica-se qual face de cada uma delas fica voltada para cima: cara ou coroa. Qual a probabilidade de obter ao menos duas caras nesse experimento?



Resolução

Podemos construir uma árvore de possibilidades para representar todas as possibilidades nos lançamentos das moedas. Para isso, indicamos por C a obtenção de cara e por K, de coroa.

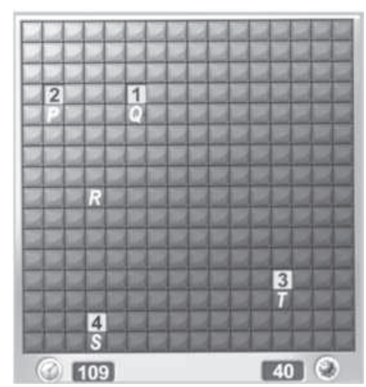
Para obter ao menos duas caras, é necessário que ocorra cara exatamente em dois ou em três lançamentos. Observando a árvore de possibilidades, temos que as possibilidades de obter exatamente duas caras são três (CCK, CKC e KCC) e há uma possibilidade de obter três caras (CCC). Assim:

$$P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

quantidade de resultados favoráveis

quantidade total de resultados possíveis

R6. (Enem/MEC) A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16 × 16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



ENEM

Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher, dentre os quadrados marcados com as letras **P**, **Q**, **R**, **S** e **T**, um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

a) **P**. **b)** **Q**. **c)** **R**. **d)** **S**. **e)** **T**.

Resolução

Para resolver esta atividade, podemos realizar as seguintes etapas.

1ª) Compreender o enunciado.

Do enunciado, temos que:

- o tabuleiro do jogo tem, ao todo, 256 quadrados ($16 \cdot 16 = 256$);
- 4 quadrados do tabuleiro já foram abertos;
- cada quadrado do tabuleiro tem 8 vizinhos;
- os quadrados já abertos têm 2, 1, 4 e 3 minas nos quadrados vizinhos, sendo os quadrados com as letras **P**, **Q**, **S** e **T**, respectivamente, um desses vizinhos;
- há ao todo 40 minas no tabuleiro;
- determinar qual quadrado tem a menor probabilidade de conter uma mina, entre aqueles marcados com as letras **P**, **Q**, **R**, **S** ou **T**.

2ª) Elaborar um plano.

Inicialmente, podemos calcular as probabilidades de os quadrados marcados com as letras **P**, **Q**, **S** e **T** conterem uma mina e, em seguida, fazer o mesmo para o quadrado marcado com a letra **R**. Por fim, podemos comparar as probabilidades calculadas.

3ª) Executar o plano.

Calculando a probabilidade de os quadrados marcados com as letras **P**, **Q**, **S** e **T** conterem uma mina, temos:

- **P**: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$
- **Q**: $\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$
- **S**: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$
- **T**: $\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

Antes de calcular a probabilidade de o quadrado marcado com a letra **R** conter uma mina, precisamos considerar que, das 40 minas do tabuleiro, 10 minas são vizinhas dos quadrados já abertos $(2 + 1 + 4 + 3)$. Além disso, nenhum desses quadrados vizinhos daqueles já abertos são vizinhos do quadrado marcado com a letra **R**.

Excluindo os quadrados que já foram abertos (4) e seus respectivos vizinhos do total de quadrados do tabuleiro $(8 + 8 + 8 + 8 = 32)$, temos:

$$256 - 4 - 32 = 220\text{; ou seja, } 220 \text{ quadrados.}$$

A quantidade de minas restantes nesses 220 quadrados é dada por:

$$40 - 10 = 30\text{; ou seja, } 30 \text{ minas.}$$

Logo, a probabilidade de o quadrado marcado com a letra **R** conter uma mina é:

$$\mathbf{R}\text{: } \frac{30}{220} \simeq 0{,}136 = 13{,}6\%$$

Comparando as probabilidades calculadas, o jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra **Q**, pois nele há menor probabilidade de conter uma mina.

4ª) Verificar os resultados.

Observando o tabuleiro, podemos afirmar que, entre os quadrados marcados com as letras **P**, **Q**, **S** e **T**, aquele com menor probabilidade de conter uma mina é o marcado com **Q**, uma vez que ele é vizinho do quadrado aberto com o menor número indicado. Assim, uma maneira de verificar o resultado é comparar as probabilidades de conter uma mina nos quadrados marcados com as letras **Q** e **R**.

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

Atividades

Não escreva no livro

8. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

a) par? 12 em 25, $\frac{12}{25}$, 0,48 ou 48%
b) ímpar? 13 em 25, $\frac{13}{25}$, 0,52 ou 52%
c) múltiplo de 8? 3 em 25, $\frac{3}{25}$, 0,12 ou 12%
d) maior do que 17? 8 em 25, $\frac{8}{25}$, 0,32 ou 32%
e) composto? 15 em 25, $\frac{3}{5}$, 0,6 ou 60%

9. Considere todos os números de três algarismos distintos formados pelos algarismos 4, 1 e 5. Qual é a probabilidade de, ao escolher ao acaso um desses números, o algarismo 5 ter valor posicional 50? 2 em 6, $\frac{1}{3}$, aproximadamente 0,333 ou 33,3%

10. c) 132 em 200, $\frac{33}{50}$, 0,66 ou 66%

10. Observe a seguir a quantidade de estudantes matriculados no Ensino Médio de uma escola, por ano escolar.

Ano	Quantidade de estudantes
1º	72
2º	60
3º	68

Para representar a escola em uma Feira de Ciências, a direção vai realizar um sorteio de maneira que cada um desses estudantes tenha a mesma chance de ser sorteado.

a) Quantos estudantes do Ensino Médio estão matriculados nessa escola? 200 estudantes

b) Qual é a probabilidade de um estudante do 1º ano ser sorteado? 72 em 200, $\frac{9}{25}$, 0,36 ou 36%

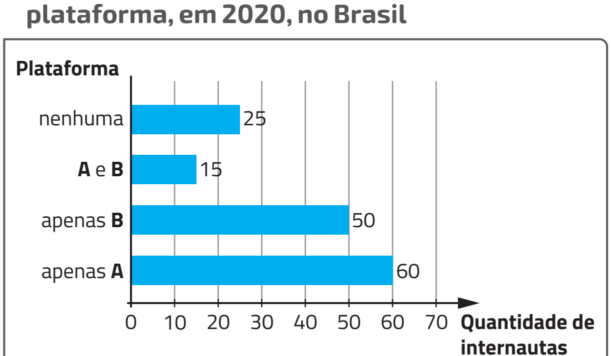
c) Qual é a probabilidade de o estudante sorteado não estar matriculado no 3º ano?

d) É mais provável que seja sorteado um estudante do 2º ano ou um estudante do 3º ano? Justifique. Resposta esperada: Um estudante do 3º ano, pois há mais estudantes matriculados no 3º ano do que no 2º ano.

11. O gerente de uma empresa decidiu realizar uma enquete com os internautas que acessaram o *site* da companhia com o objetivo de identificar quantos deles utilizam serviços de *streaming* por meio das plataformas **A** ou **B**. Para estimular a participação na enquete, ao final, um dos internautas participantes será sorteado e receberá um prêmio oferecido pelo *site*. Analise o resultado dessa enquete.

» Uso de serviços de *streaming* dos internautas de certo *site*, por tipo de plataforma, em 2020, no Brasil

CBOOK PRODUÇÕES



Fonte: Gerente da empresa.

11. a) 60 em 150, $\frac{2}{5}$, 0,4 ou 40%

11. b) 15 em 150, $\frac{1}{10}$, 0,1 ou 10%

Dica

Serviços de *streaming* são aqueles cuja transmissão dos conteúdos, como filmes, músicas e livros, ocorre pela internet.

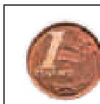
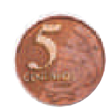
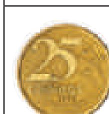
Qual é a probabilidade de que o internauta sorteado utilize serviços de *streaming*:

a) apenas da plataforma **A**?

b) de ambas as plataformas (**A** e **B**)?

c) da plataforma **B**?

12. Um colecionador separou seis moedas de valores distintos da Segunda Família do Real. Observe informações sobre essas moedas.

	Massa (g)	Diâmetro (mm)	Espessura (mm)
	2,43	17	1,65
	4,1	22	1,65
	4,8	20	2,23
	7,55	25	2,25
	7,81	23	2,85
	7	27	1,95

FOTOS: BANCO CENTRAL DO BRASIL

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Economia. Banco Central do Brasil. **Segunda Família das moedas brasileiras**. Brasília, DF, [2020]. Disponível em: www.bcb.gov.br/dinheirobrasileiro/segunda-familia-moedas.html. Acesso em: 6 set. 2020.

Resposta nas **Orientações para o professor.**

Em um experimento, esse colecionador vai colocar essas seis moedas em um pacote de feltro e, sem olhar, vai sortear apenas uma e observar seu valor. Qual é o espaço amostral desse experimento? Podemos dizer que esse é um espaço amostral equiprovável? Justifique.

11. c) 65 em 150, $\frac{13}{30}$, aproximadamente 0,433 ou 43,3%

13. b) Resposta esperada: Porque, considerando a sequência dos números naturais, o número obtido no lançamento do dado (12) é antecessor do número que Bugio escolheu (13).

13. c) Resposta esperada: Equiprovável, pois o tucano está supondo que o dado é honesto ao dizer: "A chance de sair 13 é igual pra qualquer outro número do dado".

13. Leia a tirinha a seguir.

14. c) 6 em 36, $\frac{1}{6}$, aproximadamente 0,167 ou 16,7%

WILLIAN RAPHAEL SILVA - HUMOR COM CIÊNCIA

SILVA, W. R. Bugio, o otimista. **Humor com Ciência**, 2 nov. 2011. Disponível em: www.humorcomciencia.com/blog/124-matematica/. Acesso em: 12 mar. 2020.

Considere que esse dado mencionado na tirinha seja honesto, tenha formato de icosaedro regular e, em cada uma de suas faces, é indicado um número natural de 1 até 20.

Com base nessas informações, resolva os itens a seguir.

a) Qual o número que Bugio escolheu? E qual foi o número obtido no lançamento do dado? 13. 12

b) Em sua opinião, por que Bugio utilizou a expressão "Por pouco" após o lançamento do dado?

c) Em um lançamento desse dado, o espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique sua resposta de acordo com o texto da tirinha.

d) Antes do lançamento do dado pelo tucano, qual era a probabilidade de Bugio acertar o número obtido? 1 em 20, $\frac{1}{20}$, 0,05 ou 5%

14. Considere um dado não honesto, cujo formato lembra um octaedro regular, sendo indicado em suas faces um número natural de 1 até 8. A probabilidade de obter uma face voltada para cima em um lançamento é diretamente proporcional ao número indicado na face correspondente.

LUCAS FARAUJ

a) Qual é o espaço amostral correspondente a um lançamento desse dado? É correto afirmar que esse espaço amostral é equiprovável? Justifique.

b) Qual número é mais provável de se obter no lançamento desse dado? Justifique.

c) Ao lançar esse dado, qual é a probabilidade de se obter o número 6?

d) O que é mais provável de se obter no lançamento desse dado: um número ímpar ou um número par? Justifique. número par

15. Elabore e escreva um problema envolvendo o cálculo de probabilidade e a construção de uma árvore de possibilidades. Em seguida, junte-se a um colega e troquem os problemas para que um resolva o do outro. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

16. (IME) Em um jogo de RPG "*Role-Playing Game*" em que os jogadores lançam um par de dados para determinar a vitória ou a derrota quando se confrontam em duelos, os dados são icosaedros regulares com faces numeradas de 1 a 20. Vence quem soma mais pontos na rolagem dos dados e, em caso de empate, os dois perdem. Em um confronto, seu adversário somou 35 pontos na rolagem de dados. É sua vez de rolar os dados. Qual sua chance de vencer este duelo? alternativa e

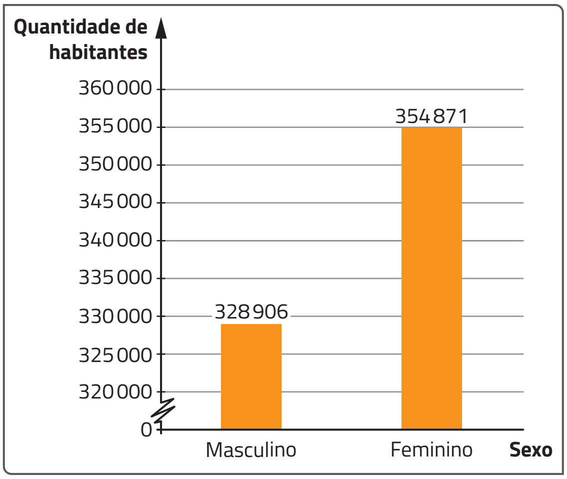
a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{76}$ **c)** $\frac{9}{400}$ **d)** $\frac{1}{80}$ **e)** $\frac{3}{80}$

14. a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Resposta esperada: Não, pois as chances de ocorrer os números indicados nas faces não são iguais entre si no lançamento do dado.

14. b) Resposta esperada: O número 8, pois esse é o maior número indicado nas faces do dado e a probabilidade de se obter cada face é proporcional ao número indicado correspondente.

17. Os dados do gráfico e da tabela representados a seguir foram coletados do sistema de Informações dos Municípios Paulistas (IMP). Observe.

» População de Ribeirão Preto (SP), por sexo, em março de 2020



Fonte dos dados: SÃO PAULO (Estado). Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados. **População e Estatísticas Vitais**. São Paulo, [2020]. Disponível em: www.imp.seade.gov.br/frontend/#/tabelas. Acesso em: 6 set. 2020.

» População de Ribeirão Preto (SP), por faixa etária, em março de 2020

Faixa etária	Frequência absoluta
$0 \vdash 15$	117 832
$15 \vdash 30$	146 737
$30 \vdash 45$	181 660
$45 \vdash 60$	127 218
$60 \vdash$	110 330

Fonte dos dados: SÃO PAULO (Estado). Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados. **População e Estatísticas Vitais**. São Paulo, [2020]. Disponível em: www.imp.seade.gov.br/frontend/#/tabelas. Acesso em: 6 set. 2020.

Em comemoração ao aniversário do município, suponha que a prefeitura de Ribeirão Preto vá sortear, ao acaso, um habitante do município para ganhar um prêmio. Com base nessas informações, podemos afirmar que: alternativa **d**

a) é mais provável que um habitante com 60 anos ou mais de idade seja sorteado em relação a um habitante com idade menor do que 15 anos;

b) a probabilidade de um habitante do sexo feminino ser sorteado é de 48%;

c) é mais provável que um habitante do sexo masculino seja sorteado do que um do sexo feminino;

d) a probabilidade de um habitante com idade maior ou igual a 30 e menor do que 45 anos, é maior do que 25%.

18. Observe a situação a seguir, proposta por um professor de Matemática.

> De um jogo de dominó completo, é retirada ao acaso uma de suas peças e os pontos indicados nas duas partes são somados. Qual é a probabilidade de o resultado obtido ser 6?

Agora, analise a resposta dada a essa questão por dois estudantes.

- Alan: A probabilidade é de $\frac{1}{12}$, pois 6 é um dos 12 resultados possíveis (soma de 0 até 12).
- Bruna: A probabilidade é de $\frac{4}{28}$, pois em 4 das 28 peças do jogo de dominó a soma dos pontos é igual a 6.

Qual desses estudantes acertou a questão? Argumente.

Resposta esperada: Bruna acertou a questão, pois das 28 peças, em 4 delas a soma das partes é igual a 6, sendo elas $0 + 6 = 6$, $1 + 5 = 6$, $2 + 4 = 6$ e $3 + 3 = 6$. Já Alan errou por considerar que o espaço amostral desse experimento, correspondente à soma dos pontos da peça de dominó sorteada, fosse equiprovável, o que não ocorre.