

CONHEÇA O VOLUME

Objetivos a serem desenvolvidos neste Volume

Ao realizar os estudos propostos neste livro da Coleção, esperamos que os objetivos apresentados a seguir sejam alcançados.

- Compreender e calcular medidas de tendência central para dados agrupados ou não agrupados e identificar qual dessas medidas melhor representa o conjunto dos dados obtidos em uma pesquisa.
- Compreender e calcular medidas de dispersão para analisar um conjunto de dados em relação à sua média aritmética.
- Reconhecer quando uma pesquisa é censitária e quando é amostral.
- Compreender ideias de algumas técnicas de amostragem e definir qual é a mais adequada para obter uma amostra de acordo com a natureza da população e das variáveis investigadas.
- Realizar pesquisas estatísticas amostrais, com dados primários ou secundários, para investigar questões relevantes e utilizar gráficos, tabelas e medidas de tendência central e de dispersão para interpretar e divulgar os resultados obtidos, com ou sem auxílio de planilha eletrônica.
- Compreender a ideia dos princípios multiplicativo e aditivo da contagem.
- Construir árvores de possibilidades e tabelas de dupla entrada para representar as possibilidades de resultados possíveis em um experimento.
- Compreender os conceitos de arranjo, combinação e permutação e identificar qual deles utilizar para resolver um problema.
- Reconhecer o uso de cálculos de probabilidade em atividades e estudos de diversas áreas do conhecimento e situações do cotidiano.
- Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório.
- Calcular a probabilidade de ocorrência ou não de um evento, considerando um espaço amostral equiprovável.
- Calcular a probabilidade da união de dois eventos e a probabilidade condicional.
- Identificar se eventos de um mesmo espaço amostral são dependentes ou independentes entre si.
- Calcular probabilidades em experimentos binomiais.
- Estimar a probabilidade de ocorrência de um evento a partir de dados estatísticos.
- Resolver e elaborar problemas, individualmente ou em grupo, envolvendo medidas de tendência central, medidas de dispersão, realização de pesquisas estatísticas amostrais, princípio multiplicativo e aditivo da contagem, arranjo, combinação, permutação e cálculo de probabilidades, relacionados ou não a situações do cotidiano.

Justificativa da pertinência dos objetivos

Os objetivos citados anteriormente são fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio lógico, para entender criticamente a realidade e contribuir na construção de uma sociedade justa e inclusiva, para acessar e divulgar informações por diferentes meios e recursos digitais, e para sua formação como cidadão crítico, reflexivo e atuante, que investiga, argumenta, promove o respeito e propõe soluções, contribuindo em suas práticas sociais, individual ou coletiva.

O planejamento e a realização de pesquisas para investigar questões relevantes, sejam elas voltadas a demandas da região em que mora, ao mercado de trabalho etc., possibilitam a mobilização e a articulação de conceitos matemáticos, como a técnica de amostragem mais adequada, o cálculo e a interpretação de medidas de tendência e de dispersão e o tipo de gráfico mais adequado para representar os resultados obtidos. Com isso, você tem aporte para tomar decisões responsáveis relacionadas à questão investigada. O processo de tratamento das informações e elaboração de relatórios possibilita também a utilização de recursos tecnológicos e de diferentes linguagens.

O trabalho com técnicas de contagem contribui para a construção de significados de ideias próprias da Matemática que podem ser utilizadas para interpretar e resolver problemas em diferentes contextos, por exemplo, ao fazer o levantamento das possibilidades de escolha existentes em determinada situação. Já o estudo de probabilidades pode ser identificado e aplicado em diferentes situações cotidianas, em que seja necessário analisar os riscos envolvidos e/ou escolher uma opção, entre outras disponíveis, levando em consideração a probabilidade atrelada a determinado evento.

Os conceitos estudados poderão ser usados para elaborar e resolver problemas e analisar e verificar os resultados obtidos, aqui ou em situações com as quais você possa se deparar futuramente.



Estatística: pesquisa e medidas de posição e de dispersão

Conectividade

O mundo virtual é um espaço de expressão e de descobertas. Por meio das redes sociais, que fazem parte das tecnologias da informação e da comunicação, podemos nos conectar a pessoas em um ambiente virtual. Além de entretenimento, esses ambientes virtuais possibilitam o acesso a informações por meio de noticiários e de *sites* que ajudam na formação educacional, por exemplo. O modo como lidamos com a quantidade de informação disponível, como nos posicionamos e como nos expressamos nesses ambientes ajudam a construir a nossa identidade.

É importante ter clareza que, apesar dos benefícios, são necessários diversos cuidados. É fundamental que tenhamos bom senso quando estamos utilizando a internet, além de ficarmos atentos ao uso excessivo, ou seja, ao tempo que ficamos conectados e ao tipo de informação que estamos acessando. Ficar muitas horas na internet pode comprometer a qualidade de vida e desencadear alguns problemas de saúde.

» Grupo de estudantes acessando diferentes tipos de mídia (digital e impressa). Jovens de 16 a 24 anos são os usuários que passam mais tempo nas redes sociais.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC:

Competências gerais: 5 e 6

Matemática e suas Tecnologias

Competências específicas: 2 e 3

Habilidades: EM13MAT202 e EM13MAT316

Competências da Natureza e suas Tecnologias

Competência específica: 3

O texto integral das competências e das habilidades citadas encontra-se no final deste livro do estudante.

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens abaixo.

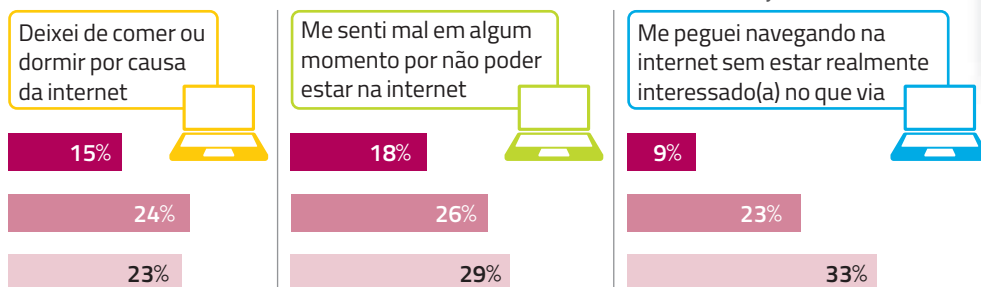
- Você costuma utilizar recursos tecnológicos digitais em seu dia a dia? Com que frequência?
- Em sua opinião, quais cuidados devem ser tomados ao navegar em redes sociais?
- Qual é a média de minutos que os estudantes brasileiros gastam por dia na internet, fora da escola? Em sua opinião, o que essa medida representa no contexto apresentado? *Veja os comentários sobre a abundância desses itens nas Orientações para o professor.*

Leia o texto a seguir, extraído do manual de orientação **Saúde de crianças e adolescentes na era digital**, publicado pela Sociedade Brasileira de Pediatria (SBP).

Estudos científicos comprovam que a tecnologia influencia comportamentos através do mundo digital, modificando hábitos desde a infância, que podem causar prejuízos e danos à saúde. O uso precoce e de longa duração de jogos *online*, redes sociais ou diversos aplicativos com filmes e vídeos na Internet pode causar dificuldades de socialização e conexão com outras pessoas e dificuldades escolares; a dependência ou o uso problemático e interativo das mídias causa problemas mentais, aumento da ansiedade, violência, *cyberbullying*, transtornos de sono e alimentação, sedentarismo, problemas auditivos por uso de *headphones*, problemas visuais, problemas posturais e lesões de esforço repetitivo (LER); problemas que envolvem a sexualidade [...]; compra e uso de drogas, pensamentos ou gestos de autoagressão e suicídio; além das “brincadeiras” ou “desafios” *online* que podem ocasionar consequências graves [...].

SBP. **Saúde de crianças e adolescentes na era digital**. Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: www.sbp.com.br/fileadmin/user_upload/2016/11/19166d-MOrient-Saude-Crian-e-Adolesc.pdf. Acesso em: 27 maio 2020.

» Porcentual de crianças e adolescentes, por situações vivenciadas ao uso excessivo da internet no Brasil, em 2017



Legenda:

- De 11 a 12 anos
- De 13 a 14 anos
- De 15 a 17 anos

Fonte dos dados: CETIC.BR. **TIC kids online Brasil 2018**. Disponível em: https://cetic.br/media/docs/publicacoes/216370220191105/tic_kids_online_2018_livro_eletronico.pdf. Acesso em: 20 abr. 2020.

» Média de minutos que os estudantes gastam por dia na internet, fora da escola



Fonte: FERREIRA, P. Brasil é o segundo país onde alunos passam mais tempo na internet nas horas vagas. **O Globo**, Rio de Janeiro, 19 abr. 2017. Disponível em: <https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/brasil-o-segundo-pais-onde-alunos-passam-mais-tempo-na-internet-nas-horas-vagas-21227360>. Acesso em: 28 maio 2020.

Conexões

Acesse este *site* para obter mais informações e dicas sobre o uso adequado de recursos tecnológicos para crianças e adolescentes:

- SBP. **Saúde de crianças e adolescentes na era digital**. Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: www.sbp.com.br/fileadmin/user_upload/2016/11/19166d-MOrient-Saude-Crian-e-Adolesc.pdf. Acesso em: 27 maio 2020.



O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT316 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Medidas de posição

Você provavelmente já estudou diferentes tipos de tabelas e de gráficos, recursos visuais que podem ser utilizados para representar um conjunto de dados. No entanto, em algumas situações, é de interesse do pesquisador utilizar um único valor, ou alguns poucos valores, para representar um conjunto de dados obtidos em uma pesquisa. Para isso, estudaremos as **medidas de posição** ou **medidas de tendência central**, como a média aritmética, a média aritmética ponderada, a moda e a mediana.

Média aritmética

Na abertura desta Unidade, vimos algumas informações sobre o uso das tecnologias digitais por crianças e jovens. Uma das maneiras de reduzir os riscos ocasionados pelo uso excessivo da internet em *smartphones*, por exemplo, é controlar o tempo de uso. Alguns sistemas operacionais desses dispositivos oferecem, de maneira periódica, relatórios com informações detalhadas sobre o tempo de uso do aparelho e dos aplicativos mais utilizados. Veja, a seguir, o relatório de um *smartphone* que indica o tempo diário de uso do aparelho em certa semana.



Para representar o tempo de uso semanal do aparelho, podemos adicionar o tempo de uso em cada dia, em minutos, e dividir a soma obtida pela quantidade de dias da semana. O resultado calculado corresponde à média de uso diário nessa semana.

$$\frac{112 + 25 + 39 + 25 + 62 + 42 + 45}{7} = \frac{350}{7} = 50$$

Portanto, podemos dizer que, nessa semana, o tempo médio de uso desse *smartphone* foi de 50 minutos por dia.

Para pensar

Explique como seria possível calcular a média diária de uso desse *smartphone* em certo mês.

Resposta esperada:
Adicionando o tempo de uso em cada dia desse mês e dividindo a soma obtida pela quantidade de dias do mês.

Dados n números reais $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, a **média aritmética** (ou **média**) desses números, indicada por \bar{x} é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Em relação à situação apresentada, note que, no domingo e na quinta-feira, o tempo de uso do *smartphone* foi maior do que a média diária da semana. Nos demais dias, o tempo de uso foi menor do que a média.

Média aritmética ponderada

Considere a situação a seguir.

Uma determinada escola decidiu que o processo seletivo para contratar um funcionário seria realizado em três etapas, cada uma delas teria um peso e o valor máximo obtido em cada etapa poderia chegar a 100 pontos, conforme descrito a seguir.

etapa **A**



prova escrita
de peso 3

etapa **B**



prova prática
de peso 5

etapa **C**



análise de
currículo de
peso 2

Qual a nota final de um candidato que obteve 62 pontos na etapa **A**, 58 pontos na etapa **B** e 75 pontos na etapa **C**?

Para resolvermos a situação apresentada, é preciso levar em consideração que o peso das etapas é diferente. Nesse caso, para obter a nota final desse candidato, vamos calcular a média aritmética ponderada das pontuações obtidas em cada etapa do processo seletivo.

A **média aritmética ponderada** (ou **média ponderada**) de n números reais $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, com pesos reais $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, respectivamente, indicada por \bar{x}_p , é dada por:

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$$

Em relação à situação apresentada, temos:

$$\bar{x}_p = \frac{62 \cdot 3 + 58 \cdot 5 + 75 \cdot 2}{3 + 5 + 2} = \frac{186 + 290 + 150}{10} = \frac{626}{10} = 62,6$$

Portanto, a nota final desse candidato é 62,6 pontos.

Resposta esperada: Que os resultados de \bar{x} e \bar{x}_p podem ser diferentes, pois ao calcular a média aritmética os dados do conjunto têm o mesmo peso, já, ao calcular a média ponderada, cada dado têm valor proporcional à razão entre o peso atribuído a ele e a soma de todos os pesos.

Para pensar

Elabore uma situação envolvendo um conjunto de dados numéricos e calcule a média aritmética desses dados. Depois, estabeleça um peso diferente para cada um dos dados e calcule a média aritmética ponderada. Ao comparar os dois resultados obtidos o que você pode concluir?

Moda

Com o objetivo de elaborar um projeto para estimular a leitura tanto para os estudantes como para a comunidade escolar, a direção de uma escola publicou uma enquete em uma rede social, a fim de identificar o perfil dos estudantes e dos familiares ou responsáveis.

No último mês, quantos livros completos você leu?

0 livro

1 livro

2 livros

3 livros

4 livros

5 livros

Observe, a seguir, o resultado dessa enquete.

0	3	5	4	2	1	0	3	3	5	5	4	2	2	3
1	1	1	0	0	4	5	3	4	5	4	3	4	3	3

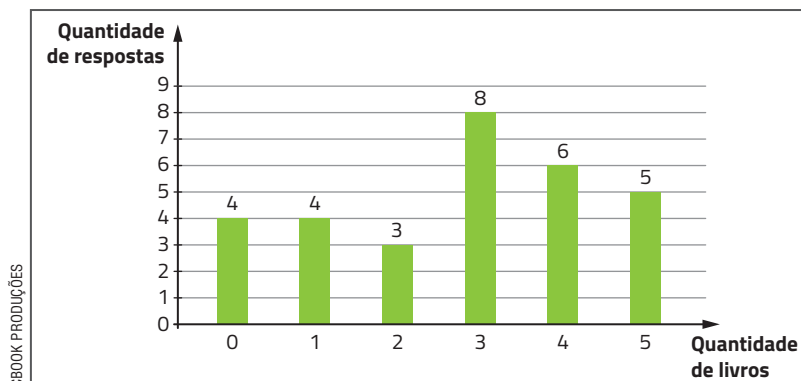
Para organizar esses dados, de acordo com a frequência absoluta (f) de cada possível resposta à enquete, podemos construir uma tabela e um gráfico.

» Resultado da enquete sobre livros lidos no último mês

Quantidade de livros	Quantidade de respostas
0	4
1	4
2	3
3	8
4	6
5	5

Fonte: Direção da escola.

» Resultado da enquete sobre livros lidos no último mês



» O hábito da leitura contribui para ampliar o conhecimento sobre diferentes assuntos, o vocabulário e a capacidade de argumentação.

Fonte: Direção da escola.

Note que o valor de maior frequência nesse conjunto de dados é três livros, que corresponde à resposta de oito pessoas. Nesse caso, dizemos que a moda desse conjunto de dados é três livros.

A **moda**, indicada por M_o , de um conjunto de dados em que as frequências dos valores não são todas iguais corresponde a todo valor de maior frequência.

Quando a moda de um conjunto de dados corresponde a dois valores distintos, dizemos que esse conjunto de dados é **bimodal**. Em um conjunto de dados, quando as frequências de todos os valores são iguais, dizemos que esse conjunto de dados é **amodal**.

Para pensar

Escreva um conjunto de dados que seja bimodal e outro que seja amodal.

Uma resposta possível: Conjunto de dados bimodal: 3, 4, 4, 5, 5 (moda: 4 e 5); conjunto de dados amodal: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

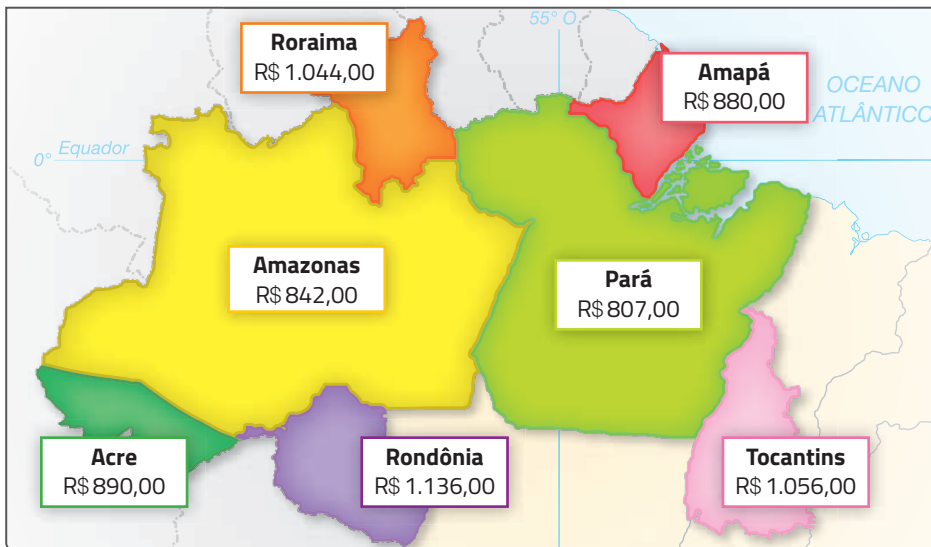
Mediana

Você já ouviu falar em rendimento nominal mensal domiciliar *per capita*?

O rendimento nominal mensal domiciliar *per capita* é obtido dividindo-se a soma dos rendimentos de cada um dos moradores pela quantidade de pessoas no domicílio. Os dados a seguir foram divulgados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) com base nas informações da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua).

Resposta esperada: O rendimento nominal mensal domiciliar *per capita* é um indicador que pode ser utilizado para medir a capacidade dos moradores de um domicílio de certa localidade em adquirir bens e serviços.

» **Rendimento nominal mensal domiciliar *per capita* nos estados da região Norte do Brasil, em 2019***



Para pensar

Pesquise para que servem os dados sobre o rendimento nominal mensal domiciliar *per capita* e compartilhe as informações obtidas com os colegas.

Fonte dos dados: AGÊNCIA IBGE Notícias. **IBGE divulga o rendimento domiciliar *per capita* 2019.** Rio de Janeiro, 28 fev. 2020. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/26956-ibge-divulga-o-rendimento-domiciliar-per-capita-2019>. Acesso em: 2 jun. 2020.

* Valores arredondados ao inteiro de real mais próximo.

Para representar o rendimento nominal mensal domiciliar *per capita* nos estados da região Norte, em 2019, podemos utilizar a medida de posição denominada mediana. Para isso, inicialmente organizamos os valores (em reais) por estado em rol, ou seja, em ordem crescente ou em ordem decrescente. Por fim, identificamos o valor que ocupa a posição central nesse rol.

807	842	880	890	1044	1056	1136
-----	-----	-----	------------	------	------	------

Nesse caso, o quarto valor é aquele que ocupa a posição central no rol.

Portanto, podemos dizer que a mediana do rendimento nominal mensal domiciliar *per capita* dos estados da região Norte, em 2019, é R\$ 890,00.

Na situação apresentada, o conjunto de dados possui sete valores, ou seja, uma quantidade ímpar. Em casos como esse, o rol de valores possui uma posição central, correspondente à mediana.

Quando a quantidade de valores de um conjunto de dados é par, a mediana corresponde à média dos dois valores centrais do rol. Por exemplo, para determinar a mediana (Md) dos dez números a seguir, organizados em rol, calculamos a média aritmética entre os valores que ocupam a quinta e a sexta posição.

780	975	1081	1102	1175	1203	1450	1505	1590	1600
-----	-----	------	------	-------------	-------------	------	------	------	------

$$Md = \frac{1175 + 1203}{2} = 1189$$

A **mediana**, indicada por Md , é uma medida de posição que, para ser determinada, é necessário que os valores do conjunto de dados da pesquisa estejam organizados em rol.

Quando a quantidade de valores é ímpar, a mediana corresponde ao valor da posição central. Já quando a quantidade de valores é par, a mediana corresponde à média aritmética dos dois valores das posições centrais.

Medidas de posição para dados agrupados em intervalos de classe

Em uma tabela de distribuição de frequência com os dados agrupados em intervalos de classe, não conhecemos cada valor do conjunto de dados. Nesses casos, uma alternativa para estimar a média, a moda e a mediana é, inicialmente, determinar o valor médio de cada intervalo de classe, que corresponde à média de seus extremos. Acompanhe o exemplo a seguir.

» Altura dos estudantes do Ensino Médio de uma escola, em fevereiro de 2020

Altura (cm)	Frequência absoluta	Valor médio
140–150	5	145
150–160	25	155
160–170	22	165
170–180	5	175
180–190	3	185
Total	60	

Fonte: Direção da escola.

Dica

Para o intervalo de classe 140–150, por exemplo, o valor médio é dado por:

$$\frac{140 + 150}{2} = 145$$

▪ **Média aritmética**

Nesse caso, podemos adicionar os produtos da frequência absoluta pelo valor médio de cada intervalo de classe e dividir o resultado obtido pelo total da frequência absoluta.

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 145 + 25 \cdot 155 + 22 \cdot 165 + 5 \cdot 175 + 3 \cdot 185}{60} = \frac{9\,660}{60} = 161$$

Portanto, podemos estimar que a média da altura dos estudantes do Ensino Médio dessa escola, em fevereiro de 2020, é 161 cm.

▪ **Moda**

A moda, nesse caso, corresponde ao valor médio do intervalo de classe de maior frequência.

Portanto, podemos estimar que a moda da altura dos estudantes do Ensino Médio dessa escola, em fevereiro de 2020, é 155 cm.

▪ **Mediana**

A mediana corresponde ao valor médio do intervalo de classe que contém o valor central dos dados, se a quantidade de valores for ímpar. Já quando a quantidade de valores é par, a mediana corresponde à média dos valores médios dos intervalos de classe que contém os dois valores centrais.

Na situação apresentada, como a quantidade de valores é par (60), a mediana é dada pela média dos valores médios dos intervalos de classe 150–160 (que contém o 30º valor) e 160–170 (que contém o 31º valor).

$$Md = \frac{155 + 165}{2} = 160$$

Portanto, podemos estimar que a mediana de altura dos estudantes do Ensino Médio dessa escola, em fevereiro de 2020, é 160 cm.

Atividades resolvidas

R1. Em certo concurso, a nota final de cada candidato corresponde à média ponderada de suas notas em duas provas: uma prática e uma teórica. Observe as informações a seguir.

» **Notas de dois candidatos aprovados**

Candidato	Nota da prova teórica	Nota da prova prática	Nota final
Luiza	6	8	7,5
Jair	8,5	6,5	7

Fonte: Organizadores do concurso.

Qual o peso de cada prova, sabendo que a soma desses pesos é igual a 10?

Resolução

Seja p e t os pesos das provas prática e teórica, respectivamente, podemos escrever e resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} t + p = 10 \cdot (-6) \\ \frac{6t + 8p}{10} = 7,5 \cdot 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6t - 6p = -60 \\ 6t + 8p = 75 \end{cases} +$$

$$0t + 2p = 15 \Rightarrow p = 7,5$$

$$t + p = 10 \Rightarrow t + 7,5 = 10 \Rightarrow t = 2,5$$

Portanto, a prova prática tem peso 7,5, e a prova teórica, 2,5.

Para pensar

As notas de qual candidato foram atualizadas nesta resolução? Explique como você resolveria essa atividade de outra maneira?

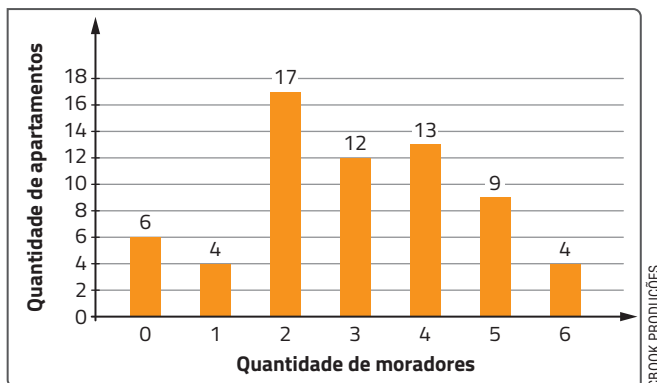
Luiza. Resposta esperada: Resolvendo um sistema obtido a partir das notas dos dois candidatos ou das notas de Jair de a soma dos pesos.

R2. O síndico de um edifício residencial realizou uma pesquisa sobre a quantidade de moradores em cada apartamento e organizou os dados obtidos em um gráfico, conforme descrito ao lado.

Em relação à quantidade de moradores por apartamento desse edifício, calcule a:

- a) média aritmética;
- b) moda;
- c) mediana.

» **Moradores por apartamento, em 4/3/2020**



Fonte: Síndico do edifício.

Resolução

a) Para determinar a média, podemos calcular o total de moradores do edifício e dividir o resultado obtido pela quantidade de apartamentos.

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 4 \cdot 6}{6 + 4 + 17 + 12 + 13 + 9 + 4} = \frac{195}{65} = 3$$

Portanto, nesse edifício, vivem, em média, três moradores por apartamento.

b) Observando o gráfico, podemos notar que a quantidade de moradores por apartamento mais frequente nesse edifício é dois moradores (17 apartamentos). Portanto, nesse edifício, a moda é de dois moradores por apartamento.

c) Nesse edifício, há, ao todo, 65 apartamentos. Assim, com os dados organizados em rol, a mediana corresponde à quantidade de moradores do 33º apartamento.

Fazendo $6 + 4 + 17 = 27$ e $6 + 4 + 17 + 12 = 39$, temos que no 33º apartamento vivem três moradores.

Portanto, nesse edifício, a mediana é três moradores por apartamento.

R3. (UFJF-MG) As notas de 10 candidatos em um concurso público estão listadas no quadro abaixo:

8,3	7,9	8,3	7,8	7,7	8,8	8,3	7,9	7,5	7,8
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Serão considerados aprovados somente os candidatos cuja nota for superior à média e maior ou igual à mediana da distribuição das notas de todos os candidatos.

O número de candidatos aprovados nesse concurso é

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 5
- e) 6

Resolução

Calculando a média das notas dos candidatos, temos:

$$\bar{x} = \frac{8,3 + 7,9 + 8,3 + 7,8 + 7,7 + 8,8 + 8,3 + 7,9 + 7,5 + 7,8}{10} = \frac{80,3}{10} = 8,03$$

Organizando as notas em rol e calculando a mediana, temos:

7,5; 7,7; 7,8; 7,8; **7,9; 7,9**; 8,3; 8,3; 8,3; 8,8

$$Md = \frac{7,9 + 7,9}{2} = 7,9$$

Como serão considerados aprovados os candidatos com nota superior à média e maior ou igual à mediana, temos que serão aprovados os quatro candidatos com nota superior a 8,03 (três candidatos com nota 8,3 e um candidato com nota 8,8).

Portanto, a alternativa **c** é a correta.