5

UNIDADE

Conceitos básicos da Probabilidade

Objetivo

Nesta Unidade você compreenderá os conceitos de Probabilidade e a importância do uso do raciocínio probabilístico para auxiliar o administrador na tomada de decisões em ambiente de incerteza.

Probabilidade: conceitos gerais

Caro estudante,

Nesta Unidade vamos estudar os conceitos básicos de Probabilidade, tais como Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Eventos, Axiomas e Propriedades, Probabilidade Condicional e Independência Estatística. Nos EUA há uma anedota que diz: "as únicas coisas que são certas são a morte e os impostos". Em outras palavras, estamos imersos na incerteza, e os administradores diariamente precisam tomar decisões, muitas delas, extremamente sérias, em um cenário de grande incerteza:

- lançamos ou não um novo modelo de automóvel?
- convertemos nossos fornos de óleo combustível para gás natural?
- qual será a reação do nosso público às mudanças na grade de programação?

Por que há incerteza? Porque a **variabilidade** inerente à natureza impede a compreensão completa dos fenômenos naturais e humanos. Mas, os seres humanos precisam tomar decisões, assim é necessário levar a incerteza em conta no processo: alguns apelam para a sabedoria popular, outros para o místico. Os administradores precisam tomar decisões de forma objetiva, e surge então a Probabilidade como uma das abordagens de tratamento da incerteza.

A utilização de métodos probabilísticos proporciona um grande auxílio na tomada de decisões, pois permite avaliar riscos, e otimizar recursos (sempre escassos) para as situações mais prováveis. Você está convidado a conhecer mais sobre esse tema nesta Unidade.

Unidade 5

Nas Unidades 3 e 4 foi utilizado um raciocínio predominantemente indutivo. Os dados foram coletados, e através da sua organização em distribuições de frequências e medidas de síntese foi possível caracterizar a variabilidade do fenômeno observado, e elaborar hipóteses ou conjecturas a respeito.

Suponha que estamos estudando o percentual de meninos e meninas nascidos em um estado brasileiro. Consultando dados do IBGE, provenientes de censos e levantamentos anteriores (portanto distribuições de frequências da variável qualitativa sexo dos recém-nascidos) há interesse em prever qual será o percentual de nascimentos no ano de 2009: em suma será usado um raciocínio dedutivo, a partir de algumas suposições sobre o problema (a definição dos resultados possíveis, os percentuais registrados em anos anteriores) tenta-se obter novos valores.

Se o percentual de meninos no passado foi de 49% a pergunta é: qual será o percentual de meninos nascidos no ano de 2009? É possível que seja um valor próximo de 49%, talvez um pouco acima ou um pouco abaixo, mas não há como responder com certeza absoluta, pela simples razão que o fenômeno ainda não ocorreu, e que sua natureza é aleatória, ou seja, é possível identificar quais serão os resultados possíveis (menino ou menina), e há uma certa regularidade nos percentuais de nascimentos (verificados anteriormente), mas não é possível responder qual será o resultado exato antes do fenômeno ocorrer.

A regularidade citada (que foi observada para um grande número de nascimentos) permite que seja calculado o grau de certeza, ou confiabilidade, da previsão feita, que recebe o nome de **Probabilidade**. Haverá uma grande probabilidade de que realmente o percentual de meninos nascidos em 2009 seja de 49%, mas nada impede que um valor diferente venha a ocorrer.

Sem saber montamos um Modelo Probabilístico para o problema em questão:

- foram definidos todos os resultados possíveis para o fenômeno (experimento); e
- definiu-se uma **regra** que permite dizer quão provável será cada resultado ou grupo de resultados.

O Modelo Probabilístico permite expressar o grau de incertezas através de probabilidades.

Variabilidade – diferenças encontradas por sucessivas medições realizadas em pessoas, animais ou objetos, em tempos ou situações diferentes. Fonte: Montgomery (2004).

Probabilidade – descrição quantitativa da certeza de ocorrência de um evento, geralmente representada por um número real entre 0 e 1 (0% e 100%). Fonte: elaborado pelo autor.

Modelo Probabilístico – modelo matemático para descrever a certeza de ocorrência de eventos, onde são definidos os eventos possíveis e uma regra de ocorrência para calcular quão provável é cada evento ou conjunto de eventos. Fonte: Barbetta (2007).

A regra citada foi definida a partir de observações anteriores do fenômeno, mas também poderia ser formulada com base em considerações teóricas. Por exemplo, se há interesse em estudar as proporções de ocorrências das faces de um dado, e se este dado não é viciado espera-se que cada face ocorra em 1/6 do total de lançamentos: se o dado for lançado um grande número de vezes isso provavelmente ocorrerá, mas um resultado diferente poderia ser obtido sem significar que o dado está viciado, principalmente se forem feitos poucos lançamentos.

Neste ponto, é importante ressaltar que os modelos probabilísticos não têm razão de ser para fenômenos (experimentos) não aleatórios (**determinísticos**): aqueles em que usando teorias e fórmulas apropriadas pode-se prever exatamente qual será o seu resultado antes do fenômeno ocorrer, por exemplo, o lançamento de uma pedra de 5 kg de uma altura de 10 metros, havendo interesse em cronometrar o tempo para que ela atinja o chão. Conhecendo o peso da pedra, a altura do lançamento, a aceleração da gravidade e as leis da física, é perfeitamente possível calcular o tempo de queda, não há necessidade sequer de realizar o experimento.

Para construir ou utilizar modelos probabilísticos é necessário que haja um grande número de realizações do fenômeno (experimento) para que uma regularidade possa ser verificada: é a Lei dos Grandes Números. No início do Século XX o estatístico inglês Karl Pearson lançou uma moeda não viciada 24.000 vezes (!) para verificar a validade dessa lei: obteve 12.012 caras, praticamente o valor esperado (12.000, 50%).

Para prosseguirmos precisamos de algumas definições importantes para estudar os modelos probabilísticos. Precisamos definir exatamente as condições em que devemos usar modelos probabilísticos, e isso exige saber o que é experimento aleatório, espaço amostral e eventos. Vamos ver?

Definições Prévias

Experimento Aleatório

Experimento Aleatório é um processo de obtenção de um resultado ou medida que apresenta as seguintes características:

- não podemos afirmar, antes de realizar o experimento, qual será o resultado de uma realização, mas é possível determinar o conjunto de resultados possíveis.

- quando é realizado um grande número de vezes (replicado) apresentará uma regularidade que permitirá construir um modelo probabilístico para analisar o experimento.

São experimentos aleatórios:

a) O lançamento de um dado e a observação da face voltada para cima; não sabemos exatamente qual face vai ocorrer, apenas que será uma das seis, e que se o dado for não viciado e o lançamento imparcial, todas as faces têm a mesma chance de ocorrer.

b) A observação dos diâmetros, em mm, de eixos produzidos em uma metalúrgica; sabemos que as medidas devem estar próximas de um valor nominal, mas não sabemos exatamente qual é o diâmetro de cada eixo antes de efetuar as mensurações.

c) O número de mensagens que são transmitidas corretamente por dia em uma rede de computadores; sabemos que o mínimo possível é zero, mas não sabemos nem sequer o número máximo de mensagens que serão transmitidas.

Todo experimento aleatório terá alguns resultados possíveis, que constituirão o Espaço Amostral.

Espaço Amostral (S ou Ω)

Espaço Amostral é o conjunto de **todos** os resultados possíveis de um experimento aleatório. "Para cada experimento aleatório haverá um espaço amostral único Ω associado a ele". Neste primeiro exemplo veremos alguns experimentos aleatórios com os respectivos espaços amostrais:

a) Lançamento de um dado e observação da face voltada para cima: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Retirada de uma carta de um baralho comum (52 cartas) e observação do naipe: Ω = {copas, espadas, ouros, paus}.

c) O número de mensagens que são transmitidas corretamente por dia em uma rede de computadores: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Note que não há um limite superior conhecido, mas somente é possível a ocorrência de valores inteiros.

d) A observação do diâmetro, em mm, de um eixo produzido em uma metalúrgica: $\Omega = \{D, \text{ tal que } D > 0\}$.

e) As vendas mensais, em unidades, de determinado modelo de veículo: $\Omega = \{0, 1, ...\}$

Não há um limite superior e, teoricamente, pode haver uma infinidade de valores.

O espaço amostral pode ser:

- **finito**, formado por um número limitado de resultados possíveis, como nos casos a e b;
- **infinito numerável**, formado por um número infinito de resultados, mas que podem ser listados, como nos casos c ou e; ou
- **infinito**, formado por intervalos de números reais, como no caso d.

Um espaço amostral é dito discreto quando ele for finito ou infinito enumerável; é dito contínuo quando for infinito, formado por intervalos de números reais.

A construção do modelo probabilístico dependerá do tipo de espaço amostral como será visto mais adiante.

Eventos

Eventos são quaisquer subconjuntos do espaço amostral. Um evento pode conter um ou mais resultados, se pelo menos um dos resultados ocorrer o evento acontece! Geralmente há interesse em calcular a probabilidade de que um determinado evento venha a ocorrer, e esse evento pode ser definido de forma verbal, precisando ser "traduzido" para as definições da Teoria de Conjuntos, que veremos a seguir.

Embora nem todos os autores concordem com essa abordagem, ela auxilia bastante na compreensão dos conceitos.

Seja o Experimento Aleatório lançamento de um dado não viciado e observação da face voltada para cima: o seu espaço amostral será $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definindo três eventos:

$\mathbf{E_1} = \{2, 4, 6\}$;

$\mathbf{E_2} = \{3, 4, 5, 6\}$; e

$\mathbf{E_3} = \{1, 3\}$.

serão apresentadas as definições de **Evento União**, **Evento Intersecção**, **Eventos Mutuamente Exclusivos** e **Evento Complementar**.

Evento **União** de E_1 com E_2 ($E_1 \cup E_2$): evento que ocorre se E_1 ou E_2 ou ambos ocorrem.

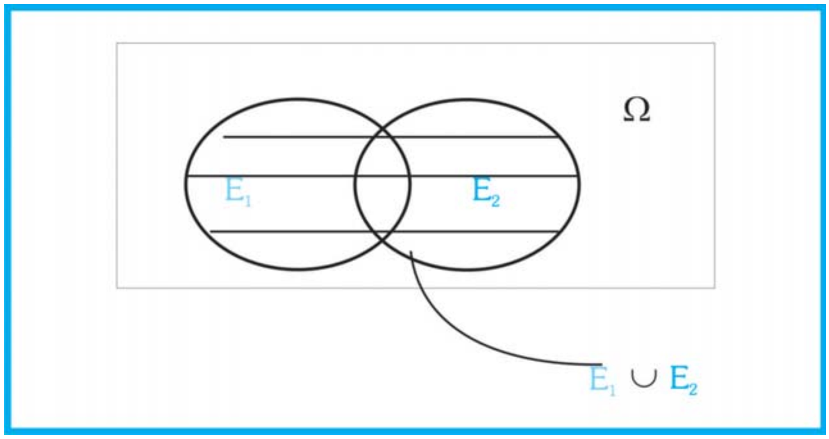

Figura 30: Evento União.
Fonte: elaborada pelo autor.

$$E_1 \cup E_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Composto por todos os resultados que pertencem a um **ou** ao outro, **ou** a ambos.

Evento **Intersecção** de E_1 com E_2 ($E_1 \cap E_2$): evento que ocorre se E_1 **E** E_2 ocorrem simultaneamente.

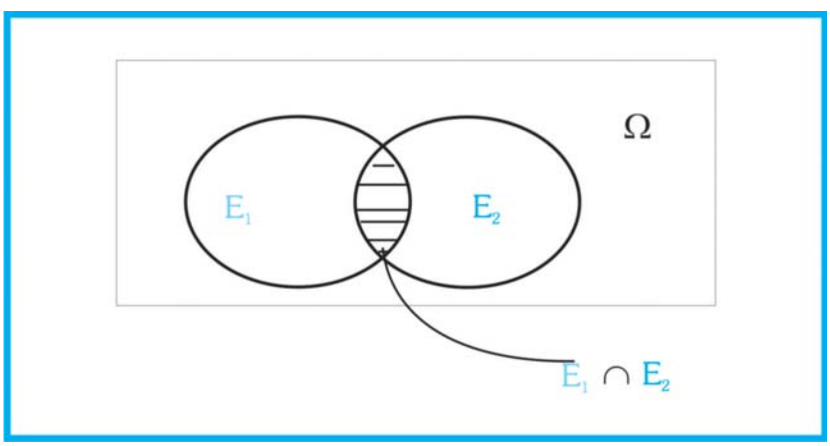

Figura 31: Evento intersecção.
Fonte: elaborada pelo autor.

Composto por todos os resultados que pertencem a ambos: $E_1 \cap E_2 = \{4, 6\}$.

Eventos **Mutuamente Exclusivos** (M.E.): são eventos que não podem ocorrer simultaneamente, não apresentando elementos em comum (sua intersecção é o conjunto vazio).

Dentre os três eventos definidos acima, observamos que os eventos E_1 e E_3 não têm elementos em comum:

$E_3 = \{1, 3\}$ $E_1 = \{2, 4, 6\}$ $E_1 \cap E_3 = \varnothing \Rightarrow E_1$ e E_3 são mutuamente exclusivos.

Evento **Complementar** de um evento qualquer é formado por todos os resultados do espaço amostral que não pertencem ao evento. A união de um evento e seu complementar formará o próprio Espaço Amostral, e a intersecção de um evento e seu complementar é o conjunto vazio.

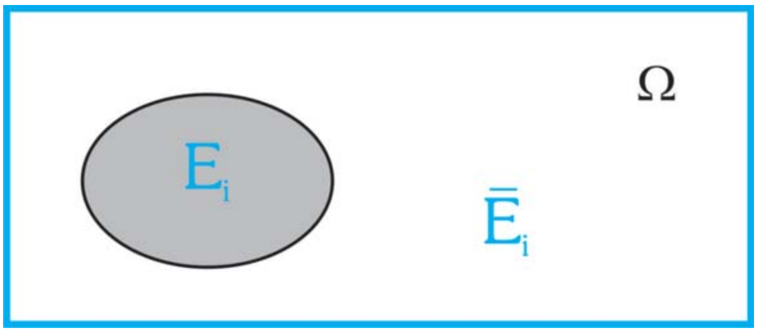

Figura 32: Evento Complementar.
Fonte: elaborada pelo autor.

$E_i \cup \overline{E_i} = \Omega$	$E_i \cap \overline{E_i} = \varnothing$
$E_1 = \{2, 4, 6\}$	$\overline{E_1} = \{1, 3, 5\}$
$E_2 = \{3, 4, 5, 6\}$	$\overline{E_2} = \{1, 2\}$

A compreensão das definições anteriores será extremamente útil quando calcularmos probabilidades, pois as expressões poderão ser deduzidas ou simplificadas se identificarmos que se trata de evento união, intersecção, ou se os eventos de interesse são mutuamente exclusivos ou complementares. Conhecido isso podemos agora passar à definição de probabilidade, ou mais especificamente às definições de probabilidade, que são complementares.

Definições de Probabilidade

Por que usamos plural, definições, ao invés de definição? Porque ao longo dos séculos várias definições de probabilidade foram apresentadas, sendo que elas se complementam.

A repetição de um experimento aleatório, mesmo sob condições semelhantes, poderá levar a resultados (eventos) diferentes. Mas se o experimento for repetido um número "suficientemente grande" de vezes haverá uma regularidade nestes resultados que permitirá calcular a sua probabilidade de ocorrência. Essa é a base para as definições que veremos a seguir.

Definição clássica de probabilidade

Intuitivamente as pessoas sabem como calcular algumas probabilidades para tomar decisões. Observe os seguintes exemplos.

Exemplo 1 – Vamos supor que você fez uma aposta com um amigo. O vencedor será aquele que acertar a face que ficar para cima após o lançamento de uma **moeda honesta**. Qual é a chance de você ganhar?

Usaremos o termo **moeda honesta** para referenciar uma moeda perfeitamente equilibrada e lançamentos imparciais. De forma análoga, usaremos o adjetivo **honesto** para dado, baralho, entre outros.

Intuitivamente você responderia que há 50% (1/2) de chances de ganhar, uma vez que há apenas duas faces (resultados) possíveis. Mesmo sem saber o que é probabilidade você pode calcular a chance de ocorrência de um evento de interesse, a face na qual você apostou.

Você continua apostando com o mesmo amigo. O vencedor agora será aquele que acertar o naipe de uma carta que será retirada ao acaso de um baralho comum de 52 cartas. Veremos neste segundo exemplo qual é a chance de você ganhar?

Novamente, de forma intuitiva você responderia que há 25% (1/4) de chance, uma vez que há apenas quatro naipes (resultados) possíveis.

O que há em comum entre as situações dos exemplos 1 e 2? Refletindo um pouco você observará que em ambos temos experimentos aleatórios. A cada realização do experimento apenas um dos resultados possíveis pode ocorrer. Além disso, como se supõe que a moeda e o baralho são honestos, cada um dos resultados possíveis tem a mesma probabilidade de ocorrer: tanto cara quanto coroa possuem 50% de chance de ocorrer, todos os quatro naipes (copas, espadas, ouros e paus) têm 25% de chance de ocorrer. Sem que você soubesse você aplicou a **definição clássica de probabilidade** para obter as chances de ganhar.

Se um experimento aleatório puder resultar em **n** diferentes e igualmente prováveis resultados, e $\mathbf{n_{Ei}}$ destes resultados referem-se ao evento $\mathbf{E_i}$, então a probabilidade do evento $\mathbf{E_i}$ ocorrer será:

$$P(Ei) = \frac{n_{Ei}}{n}.$$

O problema reside em calcular o número total de resultados possíveis e o número de resultados associados ao evento de interesse. Isso pode ser feito usando técnicas de análise combinatória (que serão vistas posteriormente) ou por considerações teóricas ("bom senso").

Seja o seguinte Experimento Aleatório: lançamento de um dado não viciado e observação da face voltada para cima. Neste Exemplo 3 vamos calcular as probabilidades de ocorrência dos seguintes eventos:

a) Face 1.

b) Face par.

c) Face menor ou igual a 2.

O Espaço Amostral deste experimento será: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sendo assim há um total de 6 resultados possíveis, resultando em **n** = 6. Basta então definir quantos resultados estão associados a cada evento para que seja possível calcular suas probabilidades pela definição clássica.

O evento "face 1" tem apenas um resultado associado: {1}. Então $\mathbf{n_{Ei}}$ = 1, e a probabilidade de ocorrer a face 1 será: $P(Ei) = \frac{n_{Ei}}{n} = \frac{1}{6}$.

O evento "face par" tem três resultados associados: {2, 4, 6}. Então $\mathbf{n_{Ei}}$ = 3, e a probabilidade de ocorrer face par será: $P(Ei) = \frac{n_{Ei}}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

O evento "face menor ou igual a 2" tem dois resultados associados: {1, 2}. Então $\mathbf{n_{Ei}}$ = 2, e a probabilidade de ocorrência de face menor ou igual a 2 será: $P(Ei) = \frac{n_{Ei}}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Como visto nos exemplos, a definição clássica, que foi desenvolvida a partir do Século XVII, foi inicialmente aplicada para orientar apostas em jogos de azar. Surgiram dois problemas dessa aplicação.

O primeiro é relativamente óbvio: muitos jogos de azar não eram "honestos", os donos das casas inescrupulosamente "viciavam" dados e roletas, marcavam baralhos, de maneira a fazer com que os clientes perdessem sistematicamente, ou seja, o lançamento dos dados ou a retirada da carta do baralho não eram mais experimentos aleatórios.

O segundo problema decorre da pergunta: será que em todos os experimentos aleatórios todos os eventos terão a mesma probabilidade de ocorrer? Será que a probabilidade de chover no mês de novembro na cidade de Brest (na França, que tem, em média, 225 dias nublados por ano), é a mesma na cidade de Sevilha (na Espanha, que tem, em média, 240 dias de sol por ano)? Precisamos partir para a **definição experimental de probabilidade**.

Definição experimental de probabilidade

Seja um experimento aleatório que é repetido **n** vezes, e $\mathbf{E_i}$ um evento associado.

A frequência relativa do evento $\mathbf{E_i}$:

$$f_{REi} = \frac{n_{Ei}}{n} = \frac{n^o \text{ vezes que } E_i \text{ ocorreu}}{\text{total de tentativas}}.$$

Quando o número de repetições tende ao infinito (ou a um número suficientemente grande) $\mathbf{f_{REi}}$ tende a um limite: a probabilidade de ocorrência do evento $\mathbf{E_i}$. A probabilidade do evento pode ser estimada através da frequência relativa. Lembre-se da Unidade 3, a descrição de um fenômeno pode ser feita por distribuição de frequências.

Quando não há outra maneira de obter as probabilidades dos eventos é necessário realizar o experimento (veja novamente a Unidade 1) várias vezes para que seja possível obter um número tal de tentativas que permita que as frequências relativas estimem as probabilidades, para que seja possível construir um modelo probabilístico para o experimento. Isso pode ser feito em laboratório, em condições controladas, por exemplo, a vida útil das lâmpadas vendidas no comércio é definida através de testes de sobrevivência realizados pelos fabricantes.

Mas, em alguns casos não é possível realizar experimentos, a maioria dos fenômenos socioeconômicos e climáticos, por exemplo. Neste caso precisamos estimar as probabilidades através das frequências relativas históricas.

Independente de como obtemos as probabilidades, elas obedecem a alguns axiomas e propriedades que veremos a seguir.

UNIDADE 5

Axiomas e Propriedades de Probabilidade

Alguns autores chamam esses axiomas e propriedades de definição axiomática da Probabilidade.

Seja um experimento aleatório e um espaço amostral associado a ele. A cada evento $\mathbf{E_i}$ associaremos um número real denominado $\mathbf{P(E_i)}$ que deve satisfazer os seguintes axiomas:

a) $0 \leq \mathbf{P(Ei)} \leq 1{,}0$:

A probabilidade de ocorrência de um evento **sempre** é um número real entre 0 e 1 (0% e 100%);

b) $\mathbf{P}\ (\Omega) = 1{,}0$:

A probabilidade de ocorrência do Espaço Amostral é igual a 1 (100%) pois pelo menos um dos resultados do Espaço Amostral ocorrerá. Por isso o Espaço Amostral é chamado de **Evento Certo**; e

c) Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são eventos mutuamente exclusivos, então $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$:

Esse axioma afirma que ao unir resultados diferentes, devemos somar as probabilidades.

Além dos axiomas, há algumas propriedades básicas da Probabilidade:

a) $P\ (\varnothing) = 0$:

A probabilidade de ocorrência do conjunto vazio é nula (igual a zero), uma vez que não há resultados no conjunto vazio. Por isso o conjunto vazio é chamado de Evento Impossível.

Evento Impossível – evento com probabilidade de ocorrer igual a 0%, é o conjunto vazio. Fonte: Barbetta, Reis e Bornia (2008).

b) $\Sigma\ \mathbf{P(E_i)} = 1{,}0$:

Se a probabilidade de ocorrência do Espaço Amostral é igual a 1 (100%) ao somar as probabilidades de todos os eventos que compõem o Espaço Amostral o resultado deverá ser igual a 1 (100%);

c) $\mathbf{P(E_i)} = 1 - \mathbf{P(\overline{E}_i)}$:

A probabilidade de ocorrência de um evento qualquer será igual a probabilidade do Espaço Amostral (1 ou 100%) menos a probabilidade de seu evento complementar (a soma das probabilidades de todos os outros eventos do Espaço Amostral); *e*

d) Sejam $\mathbf{E_i}$ e $\mathbf{E_j}$ dois eventos quaisquer: $P(\mathbf{E_i} \cup \mathbf{E_j}) = \mathbf{P(E_i)} + \mathbf{P(E_j)} - P(\mathbf{E_i} \cap \mathbf{E_j})$:

A probabilidade de ocorrência do evento União de dois outros eventos será igual a soma das probabilidades de cada evento menos a probabilidade de ocorrência do evento Intersecção dos mesmos dois eventos. Essa propriedade também é chamada de **regra da adição**.

Veja, neste quarto exemplo, o que seja o Experimento Aleatório lançamento de um dado não viciado e observação da face voltada para cima, definido no Exemplo 3: o seu espaço amostral será $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definindo três eventos: $\mathbf{E_1}$ = face 1 = $\{1\}$, $\mathbf{E_2}$ = face par = $\{2, 4, 6\}$ e $\mathbf{E_3}$ = face ≤ 2 $\{1, 2\}$, cujas probabilidades já foram calculadas.

Calcular a probabilidade de ocorrência dos seguintes eventos:

a) Complementar de $\mathbf{E_1}$;

b) Complementar de $\mathbf{E_2}$;

c) União de $\mathbf{E_2}$ e $\mathbf{E_3}$; *e*

d) União de $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$.

No Exemplo 2 obteve-se $P(\mathbf{E_1}) = 1/6$, $P(\mathbf{E_2}) = 3/6$ e $P(\mathbf{E_3}) = 2/6$.

Usando as propriedades:

$\mathbf{P(E_1)} = 1 - \mathbf{P(\overline{E_1})}$ então $\mathbf{P(\overline{E_1})} = 1 - \mathbf{P(E_1)} = 1 - 1/6 = 5/6$ $\mathbf{E_1} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

$\mathbf{P(E_2)} = 1 - \mathbf{P(\overline{E_2})}$ então $\mathbf{P(\overline{E_2})} = 1 - \mathbf{P(E_2)} = 1 - 3/6 = 3/6$ $\mathbf{E_2} = \{1, 3, 5\}$.

$\mathbf{P(E_2 \cup E_3)} = \mathbf{P(E_2)} + \mathbf{P(E_3)} - \mathbf{P(E_2 \cap E_3)}$. Observe que há apenas um elemento em comum entre os eventos $\mathbf{E_2}$ e $\mathbf{E_3}$: apenas um resultado associado $\Rightarrow \mathbf{P(E_2 \cap E_3)} = 1/6$.

$\mathbf{P(E_2 \cup E_3)} = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6$.

$\mathbf{P(E_1 \cup E_2)} = \mathbf{P(E_1)} + \mathbf{P(E_2)} - \mathbf{P(E_1 \cap E_2)}$. Não há elementos em comum entre os eventos $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$: eles são mutuamente exclusivos, sua intersecção é o conjunto vazio, e a probabilidade de ocorrência do conjunto vazio é nula. $\mathbf{P(E_1 \cup E_2)} = 1/6 + 3/6 - 0 = 4/6$.

Agora vamos exercitar a mente! Imagine que você trabalha em uma corretora de ações e precisa aconselhar um cliente sobre investir ou não em ações da PETROBRÁS. Supõe-se que o preço do barril do petróleo subirá cerca de 10% nos próximos dias, há uma probabilidade estimada de acontecer. E, sabendo disso, você gostaria de saber qual é a probabilidade de que as ações da empresa subam também 10% na BOVESPA. Este caso, em que queremos calcular a probabilidade de ocorrência de um evento condicionada à ocorrência de outro, somente poderá ser resolvido por **Probabilidade Condicional**, que veremos a seguir.

Probabilidade Condicional

Muitas vezes há interesse de calcular a probabilidade de ocorrência de um evento A qualquer, dada a ocorrência de outro evento B. Por exemplo, qual é a probabilidade de chover amanhã em Florianópolis, sabendo que hoje choveu? Ou qual é a probabilidade de um dispositivo eletrônico funcionar sem problemas por 200 horas consecutivas, sabendo que ele já funcionou por 100 horas? Ou ainda, a situação levantada anteriormente: qual é a probabilidade de que as ações da PETROBRÁS aumentem 10% se o preço do barril de petróleo subir 10% previamente?

Veja, queremos calcular a probabilidade de ocorrência de A condicionada à ocorrência prévia de B, simbolizada por P(A | B) – lê-se probabilidade de A dado B – e a sua expressão será:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{para } P(B) > 0.$$

A probabilidade de ocorrência de A condicionada à ocorrência de B será igual à probabilidade da intersecção entre A e B, dividida pela probabilidade de ocorrência de B (o evento que já ocorreu).

No denominador da expressão é colocada **sempre** a probabilidade do evento que já ocorreu.

Se houvesse interesse no oposto, probabilidade de ocorrência de B condicionada à ocorrência prévia de A:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{para } P(A) > 0.$$

Neste caso o valor no denominador seria a probabilidade de A uma vez que esse evento ocorreu previamente, tal como B na outra expressão. É importante ressaltar que a operação de intersecção é comutativa, implicando em:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B \cap A)}.$$

Seja o lançamento de dois dados não viciados, um após o outro, e a observação das faces voltadas para cima. Neste quinto exemplo iremos calcular as probabilidades:

a) de que as faces sejam iguais supondo-se que sua soma é menor ou igual a 5.

b) de que a soma das faces seja menor ou igual a 5, supondo-se que as faces são iguais.

Operação comutativa – operação em que a sequência de realização não modifica o resultado, "a ordem dos fatores não altera o produto". Fonte: elaborado pelo autor.

Observe que há interesse em calcular a probabilidade de eventos, supondo que outro evento ocorreu previamente.

Como todo problema de probabilidade é preciso montar o Espaço Amostral. Neste caso serão os pares de faces dos dados, e como os dados são lançados um após o outro a ordem das faces é importante:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Figura 33: Espaço amostral do Exemplo 5.
Fonte: elaborada pelo autor.

Há um total de 36 resultados possíveis: $\mathbf{n} = 36$. Agora é preciso definir os eventos de interesse:

a) "Faces iguais, sabendo que sua soma é menor ou igual a 5" significa dizer probabilidade de ocorrência de faces iguais supondo que já ocorreram faces cuja soma é menor ou igual a 5; chamando o evento faces iguais de $\mathbf{E_1}$ e o evento soma das faces menor ou igual a 5 de $\mathbf{E_2}$ estamos procurando $P(\mathbf{E_1} \mid \mathbf{E_2})$, probabilidade de ocorrência de $\mathbf{E_1}$ condicionada à ocorrência PRÉVIA de $\mathbf{E_2}$.

Usando a fórmula:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$ é preciso encontrar os valores das probabilidades.

Primeiramente definir o número de resultados do Espaço Amostral que pertencem aos eventos de interesse, para que seja possível calcular a sua probabilidade usando a definição clássica de probabilidade:

$\mathbf{E_1}$ = {(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)} – faces iguais, 6 resultados, $\mathbf{n_{E1}}$ = 6.

$\mathbf{E_2}$ = {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (2,1) (2,2) (2,3) (3,1) (3,2) (4,1)} – soma das faces ≤ 5, 10 resultados, $\mathbf{n_{E2}}$ = 10.

Os elementos em comum formarão o evento intersecção: $\mathbf{E_1 \cap E_2}$ = {(1,1) (2,2)} – faces iguais e soma das faces 5, 2 resultados, $\mathbf{n_{E1 \cap E2}}$ = 2.

$\mathbf{P(E_2) = n_{E2} / n = 10/36}$ $\mathbf{P(E_1 \cap E_2) = n_{E1 \cap E2} / n = 2/36}$

Tendo as probabilidades acima é possível calcular a probabilidade condicional:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{2/36}{10/36} = \frac{2}{10} = 0{,}2(20\%).$$

Então, a probabilidade de que as faces são iguais sabendo-se que sua soma é menor ou igual a 5 é de 20%.

Esse resultado poderia ser obtido de outra forma. Se a soma das faces é menor ou igual a 5, o evento $\mathbf{E_2}$ já ocorreu previamente, então o Espaço Amostral <u>modificou-se</u>, passando a ser o conjunto de resultados do evento $\mathbf{E_2}$:

novo Ω = {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (2,1) (2,2) (2,3) (3,1) (3,2) (4,1)}

O novo Espaço Amostral tem 10 resultados, novo **n** = 10.

O número de resultados do evento faces iguais ($\mathbf{E_1}$) no novo Espaço Amostral é igual a 2, novo $\mathbf{n_{E1}}$ = 2 (há apenas dois pares no novo Espaço Amostral, de soma das faces menor ou igual a 5, em que as faces são iguais).

Então, a probabilidade de ocorrer o evento $\mathbf{E_1}$ no novo Espaço Amostral, ou seja a probabilidade de ocorrência do evento $\mathbf{E_1}$ <u>condicionada</u> à ocorrência prévia do evento $\mathbf{E_2}$, P($\mathbf{E_1 | E_2}$), será:

P($\mathbf{E_1 | E_2}$) = novo $\mathbf{n_{E1}}$/ novo **n** = 2/10 = 0,2 (20%) o mesmo resultado obtido anteriormente.

b) "Soma das faces menor ou igual a 5, sabendo que as faces são iguais", significa dizer probabilidade de ocorrência de faces cuja

Houve uma mudança no evento que ocorreu previamente.

soma é menor ou igual a 5, supondo que já ocorreram faces que são iguais; chamando o evento faces iguais de $\mathbf{E_1}$ e o evento soma das faces menor ou igual a 5 de $\mathbf{E_2}$ estamos procurando $P(\mathbf{E_2}|\mathbf{E_1})$, probabilidade de ocorrência de $\mathbf{E_2}$ condicionada à ocorrência PRÉVIA de $\mathbf{E_1}$.

Usando a fórmula: $P(E_2|\,E_1) = \dfrac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}$ todos os valores já foram obtidos no item a.

$$P(E_2|\,E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6} = 0{,}33(33\%).$$

Então, a probabilidade de que as faces tenham soma menor ou igual a 5, sabendo que são iguais é de 33%.

Da mesma forma que no item a o resultado poderia ser obtido se outra forma. Se as faces são iguais, o evento $\mathbf{E_1}$ já ocorreu previamente, então o Espaço Amostral modificou-se, passando a ser o conjunto de resultados do evento $\mathbf{E_1}$: novo Ω = {(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)}.

O novo Espaço Amostral tem 6 resultados, novo $\mathbf{n}$ = 6.

O número de resultados do evento soma das faces menor ou igual a 5 ($\mathbf{E_2}$) no novo Espaço Amostral é igual a 2, novo $\mathbf{n_{E2}}$= 2 (há apenas dois pares no novo Espaço Amostral, de faces iguais, em que a soma das faces é menor ou igual a 5).

Então, a probabilidade de ocorrer o evento $\mathbf{E_2}$ no novo Espaço Amostral, ou seja a probabilidade de ocorrência do evento $\mathbf{E_2}$ condicionada à ocorrência prévia do evento $\mathbf{E_1}$, $P(\mathbf{E_2}|\mathbf{E_1})$, será: $P(\mathbf{E_2}|\mathbf{E_1})$ = novo $\mathbf{n_{E2}}$/ novo $\mathbf{n}$ = 2/6 = 0,33 (33%) o mesmo resultado obtido anteriormente.

É extremamente importante lembrar que, conceitualmente $P(A|B) \neq P(B|A)$, pois os eventos que ocorreram previamente são diferentes.

No quinto exemplo utilizamos a definição clássica para obter as probabilidades necessárias, mas poderíamos usar distribuições de frequências de dados históricos ou experimentais para obtê-las.

Regra do Produto

Uma das consequências da expressão da probabilidade condicional é a regra do produto, isolando a probabilidade da intersecção:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad => \quad P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B).$$

Neste caso o evento B ocorreu previamente, e o segundo valor é a probabilidade de ocorrência de A dado que B ocorreu.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad => \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A).$$

Neste caso o evento A ocorreu previamente, e o segundo valor é a probabilidade de ocorrência de B dado que A ocorreu.

Não se esqueça que a intersecção é comutativa.

É importante que seja observada com cuidado a sequência dos eventos para montar as expressões acima: analisar corretamente que evento já ocorreu.

No exemplo 6, digamos que uma urna contém duas bolas brancas e três vermelhas. Retiramos duas bolas ao acaso, uma após a outra. Veremos nos itens abaixo se a retirada foi feita **sem reposição**.

a) Qual é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam da mesma cor?

b) Qual é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam vermelhas, supondo que são da mesma cor?

Como em todos os problemas de probabilidade primeiramente é preciso definir o Espaço Amostral. Há duas cores e duas retiradas, então podemos ter:

- a 1ª e a 2ª bolas brancas (duas bolas da mesma cor) – evento $E_1 = B_1 \cap B_2$;
- a 1ª bola branca e a 2ª bola vermelha – evento $E_2 = B_1 \cap V_2$;
- a 1ª bola vermelha e a 2ª bola branca – evento $E_3 = V_1 \cap V_2$; e

- a 1ª bola vermelha *e* a 2ª bola vermelha (duas bolas da mesma cor) – *evento* $E_4 = V_1 \cap V_2$.

Então, o Espaço Amostral será:

$\Omega = \{ B1 \cap B2, B1 \cap V2, V1 \cap B2, V1 \cap V2\}$

Todos os quatro eventos acima são mutuamente exclusivos: quando as bolas forem retiradas apenas um, *e* somente um, dos eventos acima pode ocorrer.

As retiradas são feitas sem reposição: a segunda retirada depende do resultado da primeira. Se as retirada forem feitas sem reposição elas serão dependentes, pois o Espaço Amostral será modificado: a cada retirada, as probabilidades de ocorrência são modificadas porque as bolas não são repostas.

- A probabilidade de retirar bola branca na 1ª retirada *é* de 2/5(2 bolas brancas no total de 5), $P(B_1) = 2/5$; *e*
- a probabilidade de retirar bola vermelha na 1ª retirada *é* de 3/5 (3 bolas vermelhas em 5), $P(V_1) = 3/5$.

Se a primeira bola retirada foi branca (o *evento* B_1 ocorreu previamente), restaram 4 bolas, 1 branca *e* 3 vermelhas:

Repare que o número de bolas, número de resultados, diminuiu de 5 para 4 porque as retiradas são feitas sem reposição.

- a probabilidade de retirar uma bola branca na 2ª retirada se na 1ª foi extraída uma branca *é* de 1/4 (1 bola branca em 4), $P(B_2| B_1) = 1/4$.
- a probabilidade de retirar uma bola vermelha na 2ª retirada se na 1ª foi extraída uma branca *é* de 3/4 (3 bolas vermelhas em 4), $P(V_2| B_1) = 3/4$.

Se a primeira bola retirada foi vermelha (o *evento* V1 ocorreu previamente), restaram 4 bolas, 2 brancas *e* 2 vermelhas:

- a probabilidade de retirar uma bola branca na 2ª retirada se na 1ª foi extraída uma vermelha *é* de 2/4 (2 bolas brancas em 4), $P(B_2| V_1) = 2/4$.
- a probabilidade de retirar uma bola vermelha na 2ª retirada se na 1ª foi extraída uma vermelha *é* de 2/4 (2 bolas vermelhas em 4), $P(V_2| V_1) = 2/4$.

a) O evento que nos interessa: "bolas da mesma cor": brancas ou vermelhas, evento união brancas-vermelhas.

Chamando bolas da mesma cor de evento F: $F = [(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)]$.

Usando as propriedades de probabilidade:

$P(F) = P\,[(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(V_1 \cap V_2) - P\,(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)$.

Os eventos $(B_1 \cap B_2)$ e $(V_1 \cap V_2)$ são mutuamente exclusivos, se as bolas são da mesma cor ou são brancas ou são vermelhas, então a intersecção entre eles é o conjunto vazio, e a probabilidade do conjunto vazio ocorrer é igual a zero, então simplesmente: $P(F) = P\,[(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(V_1 \cap V_2)$.

Usando a regra do produto:

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2 | B_1) = (2/5) \times (1/4) = 2/20 = 1/10$.
$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P(V_2 | V_1) = (3/5) \times (2/4) = 6/20 = 3/10$.

Substituindo na expressão:

$P(F) = P\,[(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(V_1 \cap V_2) = 1/10 + 3/10 = 4/10 = 0{,}4\ (40\%)$.

Então, se as retiradas forem feitas sem reposição, a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor será igual a 0,4 (40%).

b) Neste caso sabemos que as duas bolas são da mesma cor (o evento F acima JÁ OCORREU) e há interesse em saber a probabilidade de que as duas bolas sejam vermelhas:

$$\mathbf{P[(V_1 \cap V_2) | F] = P\{(V_1 \cap V_2) | [(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)]\}}.$$

Usando a expressão de probabilidade condicional:

$$P\{(V_1 \cap V_2) | [(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)]\} = \frac{P\{(V_1 \cap V_2) \cap [(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)]\}}{P[(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)]}$$

A probabilidade do denominador já é conhecida do item a. E a do numerador pode ser obtida facilmente.

Repare: o que há em comum entre o evento $(V_1 \cap V_2)$ e o evento $\mathbf{[(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)]}$, em suma qual será o evento intersecção? O que há em comum entre duas bolas vermelhas e duas bolas da mesma cor? <u>O próprio evento duas bolas vermelhas</u> $(V_1 \cap V_2)$, então:

$$(V_1 \cap V_2) \cap [(\mathbf{B_1 \cap B_2}) \cup (\mathbf{V_1 \cap V_2})] = (V_1 \cap V_2);$$
$$P\{(V_1 \cap V_2) \cap [(\mathbf{B_1 \cap B_2}) \cup (\mathbf{V_1 \cap V_2})]\} = P\,(V_1 \cap V_2) = 3/10.$$

Sabendo que $P\{(V_1 \cap V_2) \mid [(\mathbf{B_1 \cap B_2}) \cup (\mathbf{V_1 \cap V_2})]\} = 4/10$ (do item a.1) e substituindo os valores na fórmula:

$$P\{(V_1 \cap V_2) \mid [(\mathbf{B_1 \cap B_2}) \cup (\mathbf{V_1 \cap V_2})]\} =$$
$$\frac{P(V_1 \cap V_2)}{P[(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)]} = \frac{\mathbf{3/10}}{\mathbf{4/10}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$
$$P\{(V_1 \cap V_2) \mid [(\mathbf{B_1 \cap B_2}) \cup (\mathbf{V_1 \cap V_2})]\} = 0{,}75\ (75\%)$$

Então, se as retiradas forem feitas sem reposição e as duas bolas forem da mesma cor, a probabilidade de que sejam vermelhas será igual a 0,75 (75%).

As retiradas e as probabilidades podem ser representadas através de um diagrama chamado de "Árvore de Probabilidades":

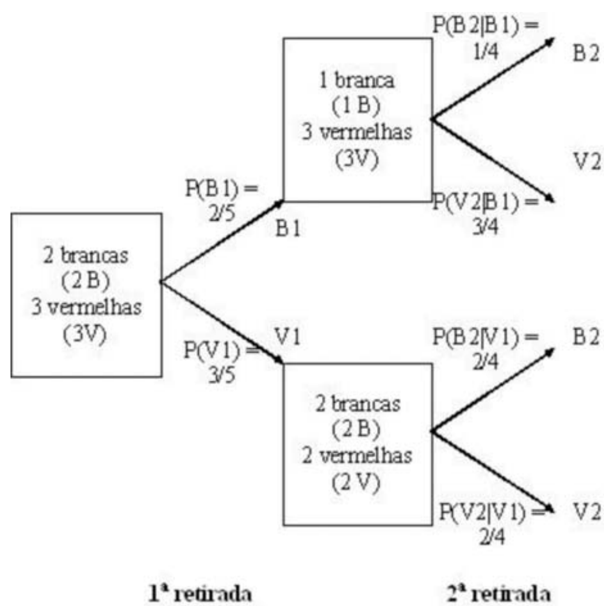

Figura 34: Árvore de Probabilidades – Retiradas sem reposição.
Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que através da Árvore de Probabilidades podemos chegar aos mesmos resultados obtidos anteriormente. Partindo do Espaço Amostral original um dos ramos significa 1ª bola branca (B_1) e o outro 1ª bola vermelha (V_1). Dependendo do resultado da primeira retirada haverá um Espaço Amostral diferente: 1 bola branca e 3 vermelhas se na 1ª retirada obteve-se uma bola branca, ou 2 bolas brancas e 2 vermelhas se na 1ª retirada obteve-se uma bola vermelha.

A partir dos novos Espaços Amostrais é possível calcular as probabilidades condicionais para cada caso, e depois substituí-las nas fórmulas adequadas. Contudo, a árvore será inútil se o evento para o qual se deseja calcular a probabilidade não for definido adequadamente: neste caso, no item a, bolas da mesma cor $[(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)]$, e no item b, bolas vermelhas sabendo que são da mesma cor $\{(V_1 \cap V_2) \mid \mathbf{[(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap V_2)]}\}$.

A árvore será igualmente inútil se não forem usadas as definições de eventos dependentes (porque não há reposição) e de eventos mutuamente exclusivos (porque os eventos não podem ocorrer simultaneamente), e as expressões de probabilidade condicional e os axiomas de probabilidade.

O grande inconveniente da Árvore de Probabilidades surge quando o número de "retiradas" aumenta e/ou o número de resultados possíveis para cada retirada é considerável: torna-se impraticável desenhar a Árvore, enumerando todos os resultados. Nesses casos usamos Análise Combinatória, que veremos adiante.

E se a ocorrência do evento A não modificasse a probabilidade de ocorrência de B? Os eventos A e B seriam chamados de independentes. Você pode imaginar situações práticas em que dois eventos sejam independentes?

Eventos Independentes

Dois ou mais eventos são independentes quando a ocorrência de um dos eventos não influencia a probabilidade de ocorrência dos outros. Se dois eventos A e B são independentes então a probabilidade de A ocorrer dado que B ocorreu é igual à própria probabilidade de ocorrência de A, e a probabilidade de B ocorrer dado que B ocorreu é igual à própria probabilidade de ocorrência de B.

Se A e B são independentes então:

$$P\ (A|B) = P(A)\ e\ P(B|A) = P(B)$$

$$P\ (A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(A) \times P(B)$$

$$P\ (A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(B) \times P(A)$$

As expressões acima são válidas se os eventos **A** e **B** forem independentes.

Em situações práticas dois eventos são independentes quando a ocorrência de um deles não modifica, ou modifica muito pouco, o Espaço Amostral do Experimento Aleatório. É o que ocorria na Unidade 2 quando fazíamos amostragem aleatória simples: naquele momento não foi dito que a amostragem era com reposição, que dificilmente é feita na prática, mas admite-se que sendo o tamanho da população muito grande, a retirada de uma pequena amostra não modificará muito as proporções dos eventos.

Exemplo 7: resolva o Exemplo 6, mas agora supondo que as retiradas foram feitas **com reposição**.

a) Qual é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam da mesma cor? R.: 0,52(52%)

b) Qual é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam vermelhas, supondo-se que são da mesma cor? R.: 0,69 (69%).

Saiba mais...

Sobre conceitos básicos de Probabilidade, BARBETTA, Pedro A. *Estatística Aplicada às Ciências Sociais*. 7. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2007, Capítulo 7.

Também sobre conceitos básico de Probabilidade: STEVENSON, Willian J. **Estatística Aplicada à Administração**. São Paulo: Editora Harbra, 2001, Capítulo 3.

LOPES, Paulo A. *Probabilidades e Estatística*. Rio de Janeiro: Reichmann e Affonso Editores, 1999, Capítulo 3.

Resumindo

O resumo desta Unidade está mostrado na Figuras 35:

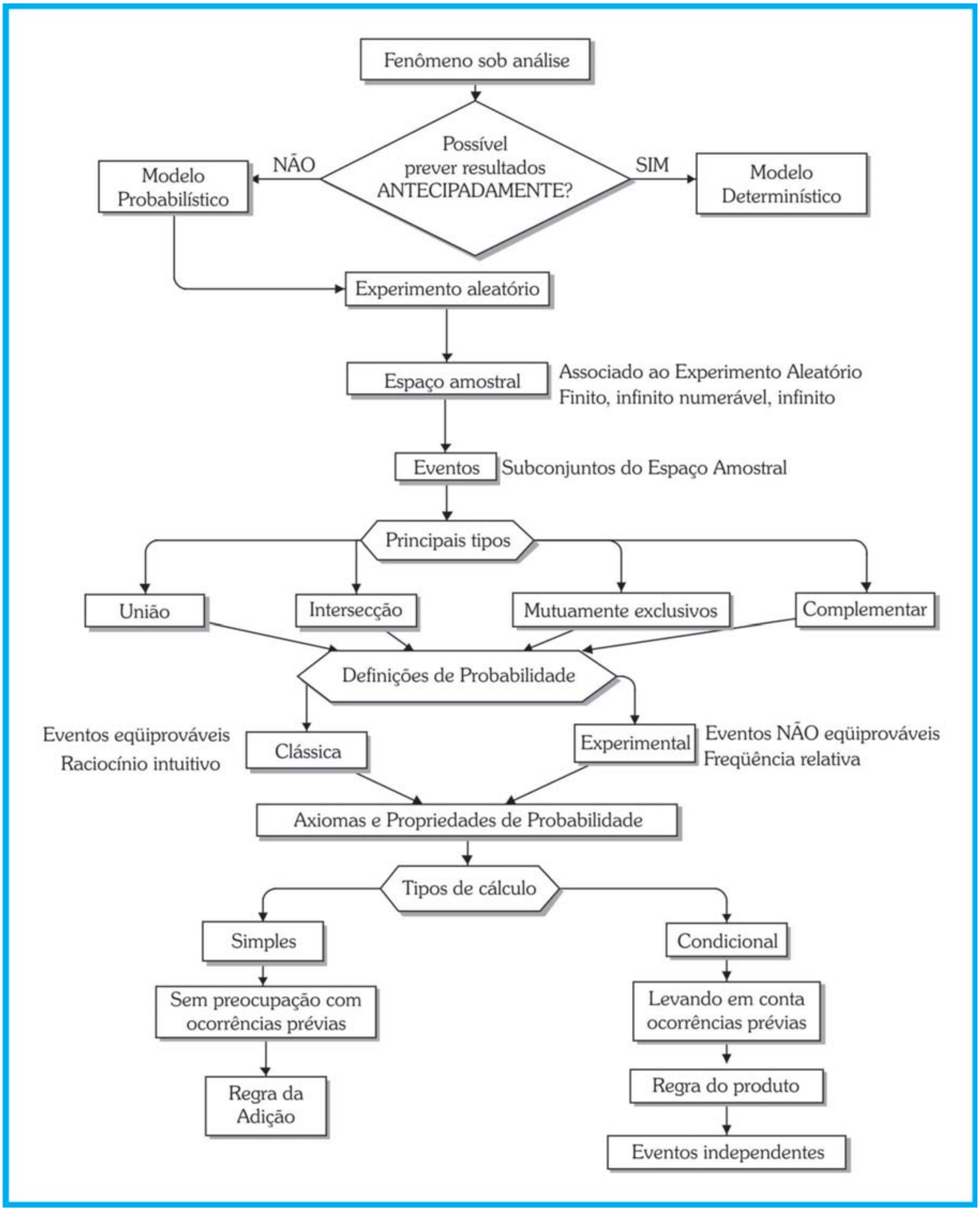

Figura 35: Resumo da Unidade 5.
Fonte: elaborado pelo autor.

Chegamos ao final de Unidade 5. Esperamos que você tenha aprendido todos os conceitos trabalhados e com os exemplo propostos, tenha colocado em pratica as informações adquiridas. Neles propomos que você reconhecesse os modelos probabilísticos, modelos determinísticos, principais tipos de eventos, e os diferentes tipos de cálculos. Na Unidade 6 vamos prosseguir, aprendendo o conceito de variável aleatória, que será indispensável para as Unidades 7, 8 e 9. Veremos ainda nas Unidade seguintes a expansão do estudo para o conceito de Variável Aleatória, e alguns dos modelos probabilísticos mais empregados. Tudo isso para chegarmos às Unidades 8 e 9, onde aplicaremos os conceitos de probabilidade no processo de inferência estatística, conforme já foi dito na Unidade 1.

Atividades de aprendizagem

1) Numa eleição para a prefeitura de uma cidade, 30% dos eleitores pretendem votar no candidato A, 50% no candidato B e 20% em branco ou nulo. Sorteia-se um eleitor na cidade e verifica-se o candidato de sua preferência.

   a) Construa um modelo probabilístico para o problema.

   b) Qual é a probabilidade de o eleitor sorteado votar em um dos dois candidatos? (R.: 0,8)

Adaptado de BARBETTA, Pedro A. *Estatística Aplicada às Ciências Sociais*. 7. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2007.

2) Extraem-se ao acaso duas cartas de um baralho de 52 cartas, uma após a outra SEM reposição. Calcule as seguintes probabilidades:

   a) Ambas as cartas são vermelhas. (R.: 0,245)

   b) Ambas as cartas são de paus. (R.: 0,058)

   c) Ambas as cartas são de “Figuras” (ás, rei, dama ou valete). (R.: 0,0905)

   d) Uma carta de paus e outra de copas. (R.: 0,1274)

   Adaptado de STEVENSON, W.J. *Estatística Aplicada à Administração*, São Paulo: Harper do Brasil, 1981, página 76.

3) Repita o exercício 2 supondo que as retiradas fossem feitas COM reposição.

   Adaptado de STEVENSON, W.J. Estatística Aplicada à Administração, São Paulo: Harper do Brasil, 1981, página 75.

   a) R.: 0,25 b) R.: 0,0625

   c) R.: 0,0947 d) 0,125

4) Para um determinado telefone a probabilidade de se conseguir linha é de 0,75 em dias normais e 0,25 em dias de chuva. A probabilidade de chover em um dia é 0,1. Além disso tendo-se conseguido linha, a probabilidade de que um número esteja ocupado é 11/21.

   a) Qual é a probabilidade de que um telefone tenha sua ligação completada? (R.: 0,333)

   b) Dado que um telefonema foi completado, qual é a probabilidade de estar chovendo? (R.: 0,0357)