6

UNIDADE

Variáveis aleatórias

Objetivo

Nesta Unidade você compreenderá o conceito de variável aleatória e seu relacionamento com os modelos probabilísticos. Aprenderá também que os modelos probabilísticos podem ser construídos para as variáveis aleatórias.

Conceito de Variável Aleatória

Caro estudante!

Uma pergunta que é normalmente feita a todos que trabalham com ciências exatas: "por que a obsessão em reduzir tudo a números"? Vimos em Análise Exploratória de Dados que uma variável quantitativa, geralmente, porque nem tudo pode ser reduzido a números, como a inteligência e a criatividade, apresenta mais informação que uma variável qualitativa, pode ser resumida não somente através de tabelas e gráficos, mas também através de medidas de síntese.

Nos exemplos sobre probabilidade apresentados na Unidade 5 os eventos foram geralmente definidos de forma verbal: bolas da mesma cor, 2 bolas vermelhas, soma das faces menor ou igual a 5, etc. Não haveria problema em definir os eventos através de números. Bastaria associar aos resultados do Espaço Amostral números, através de uma função.

Essa função é chamada de Variável Aleatória. Os modelos probabilísticos podem então ser construídos para as variáveis aleatórias. O administrador precisa conhecer esses conceitos porque eles proporcionam maior objetividade na obtenção das probabilidades, o que torna o processo de tomada de decisões mais seguro. Vamos conhecer esses conceitos nesta Unidade?

Uma definição inicial de Variável Aleatória poderia ser: trata-se de uma "variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios".

Formalmente, **Variável Aleatória** é uma função matemática que associa números reais (contradomínio da função) aos resultados de um Espaço Amostral (domínio da função), por sua vez vinculado a um Experimento Aleatório. Se o Espaço Amostral for finito ou infinito

Espaço Amostral – é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Fonte: Barbetta, Reis e Bornia (2008).

numerável a variável aleatória é dita discreta. Se o Espaço Amostral for infinito a variável aleatória é dita contínua.

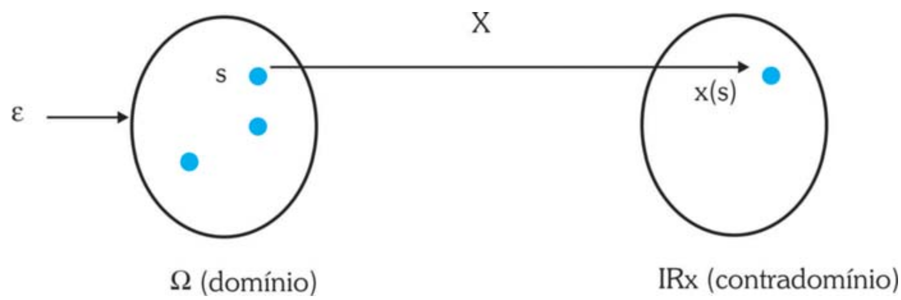

Figura 36: Variável aleatória.
Fonte: elaborada pelo autor.

Experimento Aleatório – é um processo de obtenção de um resultado ou medida que apresenta as seguintes características: não se pode afirmar, antes de realizar o experimento, qual será o resultado de uma realização, mas é possível determinar o conjunto de resultados possíveis; quando é realizado um grande número de vezes (replicado) apresentará uma regularidade que permitirá construir um modelo probabilístico para analisar o experimento. Fonte: adaptado pelo autor de Lopes (1999).

Distribuição de probabilidades – função que relaciona os valores possíveis que uma variável aleatória pode assumir com as respectivas probabilidades, em suma é o próprio modelo probabilístico da variável aleatória. Fonte: Barbetta, Reis e Bornia (2008).

Por exemplo, imaginemos o Experimento Aleatório jogar uma moeda honesta duas vezes e observar a face voltada para cima. O Espaço Amostral seria finito:

$$\Omega = \{CaraCara;\ CaraCoroa;\ CoroaCara;\ CoroaCoroa\}$$

Se houvesse interesse no número de caras obtidas, poderia ser definida uma variável aleatória discreta X, onde X = Número de caras em dois lançamentos. Os valores possíveis de X seriam: $X = \{0, 1, 2\}$

O valor 0 é associado ao evento CoroaCoroa, o valor 1 é associado aos eventos CaraCoroa e CoroaCara, e o valor 2 é associado ao evento CaraCara.

Quando o Espaço Amostral é infinito muitas vezes já está definido de forma numérica, pela própria natureza quantitativa do fenômeno analisado, facilitando a definição da variável aleatória.

Os Modelos Probabilísticos podem ser construídos para as variáveis aleatórias: assim haverá Modelos Probabilísticos Discretos e Modelos Probabilísticos Contínuos. Para construir um modelo probabilístico para uma variável aleatória é necessário definir os seus possíveis valores (contradomínio), e como a probabilidade total (do Espaço Amostral, que vale 1) distribui-se entre eles: é preciso então definir a distribuição de probabilidades.

Veja que dependendo do tipo de variável aleatória haverá diferenças na construção da distribuição.

Distribuições de probabilidades para variáveis aleatórias discretas

Podemos ver alguns exemplos de variáveis aleatórias discretas:

a) número de coroas obtido no lançamento de 2 moedas;

b) número de itens defeituosos em uma amostra retirada aleatoriamente de um lote;

c) número de defeitos em um azulejo numa fábrica de revestimentos cerâmicos; e

d) número de pessoas que visitam um determinado site num certo período de tempo.

Quando uma variável aleatória X é discreta, a obtenção da distribuição de probabilidades consiste em definir o conjunto de pares $[x_i, p(x_i)]$, onde x_i é o i-ésimo valor da variável X, e $p(x_i)$ é a probabilidade de ocorrência de x_i, como na Tabela 1:

Tabela 1: Distribuição de Probabilidades para uma Variável Aleatória Discreta.

$X = x_i$	$p(X = x_i)$
x_1	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2)$
...	...
x_n	$p(x_n)$

Fonte: elaborado pelo autor.

Onde $p(x_i) \geq 0$, n é o número de valores que X pode assumir, e

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1{,}0.$$

Ao obter a distribuição de probabilidades para uma variável aleatória discreta, se você quiser conferir os resultados, some as probabilidades, se elas não somarem 1, há algo errado. Vamos ao primeiro exemplo.

Imagine que o jogador Ruinzinho está treinando cobranças de pênaltis. Dados históricos mostram que: a probabilidade de ele acertar uma cobrança, supondo que ele acertou a anterior é de 60%. Mas, se ele tiver errado a anterior a probabilidade de ele acertar uma cobrança cai para 30%. Construa a distribuição de probabilidades do número de acertos em 3 tentativas de cobrança.

A variável aleatória X, número de acertos em três tentativas, é uma variável aleatória discreta: o seu contradomínio é finito, o jogador pode acertar 0, 1, 2 ou 3 vezes. Mas, para calcular as probabilidades associadas a esses valores é preciso estabelecer todos os eventos possíveis, pois mais de um evento contribui para as probabilidades de 1 e 2 acertos. Observando a árvore de eventos abaixo (onde A é acertar a cobrança e E significa errar).

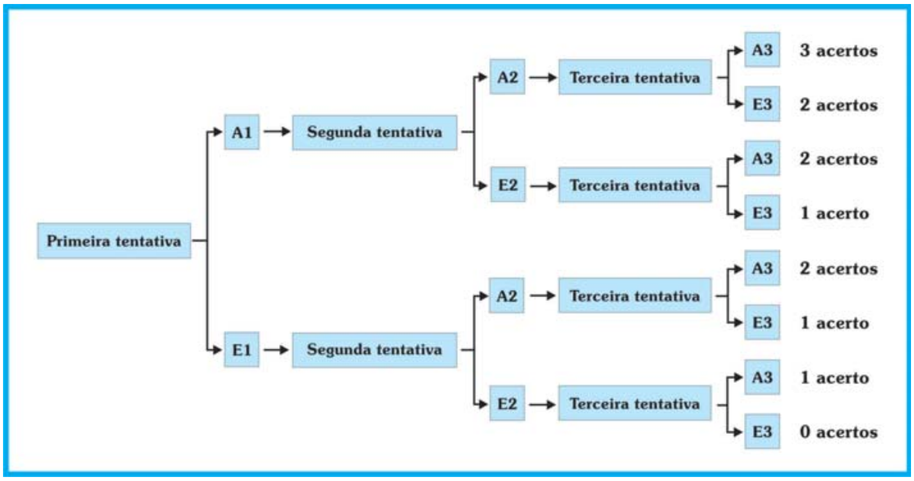

Figura 37: Árvore de eventos.
Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que todos os eventos são mutuamente exclusivos, o jogador não pode, na mesma sequência de 3 cobranças, errar e acertar a primeira. É preciso explicitar os valores da variável, e os eventos em termos de teoria dos conjuntos.

Valores possíveis = {0, 1, 2, 3} acertos. A equivalência entre os valores da variável e os eventos é estabelecida abaixo:

$$X = 0 \Leftrightarrow [E_1 \cap E_2 \cap E_3]$$

$$X = 1 \Leftrightarrow [(A_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap A_3)]$$

$$X = 2 \Leftrightarrow [(A_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap E_2 \cap A_3)]$$

$$X = 3 \Leftrightarrow [A_1 \cap A_2 \cap A_3]$$

Então:

$$P(X=0) = P[E_1 \cap E_2 \cap E_3]$$

$$P(X=1) = P[(A_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap A_3)]$$

$$P(X=2) = P[(A_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap E_2 \cap A_3)]$$

$$P(X=3) = P[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$$

Assume-se que na primeira tentativa o jogador tem 50% de chance de acertar, então: $P(A_1) = 0{,}5$ e $P(E_1) = 0{,}5$.

E_1, errar a primeira cobrança, é o evento complementar de A_1, acertar a primeira cobrança.

Além disso, estabeleceu-se que quando o jogador acertou a cobrança na tentativa anterior a probabilidade de acertar a próxima é de 0,6, e caso tenha errado na anterior a probabilidade de acertar na próxima é de apenas 0,3. Tratam-se de duas probabilidades condicionais, estabelecidas em função de eventos já ocorridos.

Se o jogador acertou na tentativa i (qualquer uma), as probabilidades de acertar e errar na próxima tentativa serão: $P(A_{i+1}|A_i) = 0{,}6$.

Pelo complementar obtém-se $P(E_{i+1}|A_i) = 0{,}4$.

Se o jogador errou na tentativa i, as probabilidades de acertar e errar na próxima tentativa serão: $P(A_{i+1}|E_i) = 0{,}3$

Pelo complementar obtém-se $P(E_{i+1}|E_i) = 0{,}7$.

Com essas probabilidades estabelecidas, lembrando da regra do produto, e considerando o fato de que os eventos são mutuamente exclusivos é possível calcular as probabilidades de ocorrência de cada valor da variável aleatória X.

$$P(X=0) = P[E_1 \cap E_2 \cap E_3] = P(E_1) \times P(E_2|E_1) \times P(E_3|\ E_1 \cap E_2).$$

Como os resultados em uma tentativa só dependem daqueles obtidos na imediatamente anterior, o terceiro termo da expressão acima pode ser simplificado para $P(E_3|E_2)$, e a probabilidade será:

$$P(X=0) = P(E_1) \text{ x } P(E_2|E_1) \text{ x } P(E_3|E_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}245$$
$$(24{,}5\%)$$

Estendendo o procedimento acima para os outros valores:

$$P(X=1) = P[(A_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap A_3)]$$
$$P(X=2) = P[(A_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap E_2 \cap A_3)]$$
$$P(X=3) = P[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$$

Como os eventos são mutuamente exclusivos:

$$P(X=1) = P(A_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap A_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap A_3)$$
$$P(X=1) =$$
$$P(A_1)\times P(E_2|A_1)\times P(E_3|E_2)+P(E_1)\times P(A_2|E_1)\times P(E_3|A_2)+P(E_1)\times P(E_2|E_1)\times P(A_3|E_2)$$

$P(X=1) = 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}305$

$P(X=2) = P(A_1 \cap A_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap E_2 \cap A_3)$

$P(X=2)$
$=P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(E_3|A_2) + P(E_1) \times P(A_2|E_1) \times P(A_3|A_2) + P(A_1) \times P(E_2|A_1) \times P(A_3|E_2)$

$P(X = 2) = 0{,}5 \times 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}27$ (27%)

$P(X=3) = P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_2) = 0{,}5 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}18$ (18%)

Com os valores calculados acima é possível construir a Tabela 2 com os pares valores-probabilidades.

Tabela 2: Distribuição de probabilidades: número de acertos em 3 cobranças.

X	$P(X = x_i)$
0	0,245
1	0,305
2	0,270
3	0,180
Total	1,0

Fonte: elaborado pelo autor.

Ao longo dos séculos matemáticos e estatísticos deduziram modelos matemáticos para tornar mais simples a obtenção de distribuição de probabilidades para uma variável aleatória discreta. Alguns desses modelos serão vistos na Unidade 7.

Vamos agora passar para a análise das variáveis aleatórias discretas.

Distribuições de probabilidades para variáveis aleatórias contínuas

Unidade 6

Podemos ver alguns exemplos de variáveis aleatórias contínuas:

- volume de água perdido em um sistema de abastecimento;
- renda familiar em salários mínimos de pessoas selecionadas por amostragem aleatória para responder uma pesquisa;
- a demanda por um produto em um mês; e
- tempo de vida de uma lâmpada incandescente.

Uma variável aleatória contínua está associada a um Espaço Amostral infinito. Assim, a probabilidade de que a variável assuma exatamente um valor xi é zero, não havendo mais sentido em representar a distribuição pelos pares x_i – $p(x_i)$. Igualmente sem sentido fica a distinção entre > e ≥ existente nas variáveis aleatórias discretas. Utiliza-se então uma função não negativa, a função densidade de probabilidades, definida para todos os valores possíveis da variável aleatória.

Uma função densidade de probabilidades poderia ser apresentada graficamente da seguinte forma:

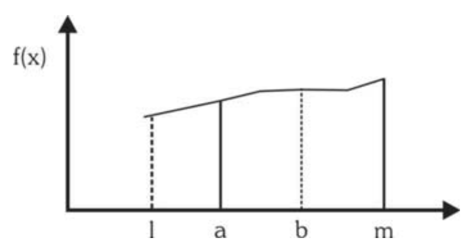

Figura 38: Função densidade de probabilidades.
Fonte: elaborada pelo autor.

Para calcular a probabilidade de uma variável aleatória contínua assumir valores entre **a** e **b** (dois valores quaisquer), basta calcular a área abaixo da curva entre a e b. Se a área for calculada entre l e m (limites da função) tem que dar 1, que é a probabilidade total. Usualmente isso é feito calculando a integral da função no intervalo de interesse. Em muitas situações de nosso interesse tais probabilidades podem ser calculadas através de fórmulas matemáticas relativamente simples, ou foram dispostas em tabelas, que são encontradas em praticamente todos os livros de estatística, e que serão vistas na Unidade 7.

Agora vamos ver alguns conceitos muito importantes como valor esperado e variância de uma variável aleatória.

Valor Esperado e Variância

Todos os modelos probabilísticos apresentam duas medidas (dois momentos) que permitem caracterizar a variável aleatória para a qual eles foram construídos: o Valor Esperado e a Variância da variável aleatória. O Valor Esperado (simbolizado por E(X)) nada mais é do que a média aritmética simples vista em Análise Exploratória de Dados (Unidade 4), utilizando probabilidades ao invés de frequências no cálculo. Analogamente, a Variância (simbolizada por V(X)) é a variância vista anteriormente, utilizando probabilidades. Da mesma forma que em Análise Exploratória de Dados é também comum trabalhar com o Desvio Padrão, raiz quadrada positiva da Variância (que aqui será simbolizado por σ(X), "sigma de X"). A interpretação dos resultados obtidos pode ser feita de forma semelhante à Análise Exploratória de Dados, apenas recordando que se trata de uma variável aleatória, e estão sendo usadas probabilidades e não frequências.

Para uma variável aleatória discreta o valor esperado e a variância podem ser calculados da seguinte forma:

$$\mathbf{E(X)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i} \times \mathbf{p(x_i)} \qquad \mathbf{V(X)} = \mathbf{E}\left(\mathbf{X^2}\right) - [\mathbf{E(X)}]^{\mathbf{2}}, \textbf{ onde } \mathbf{E}\left(\mathbf{X^2}\right) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i}^{\mathbf{2}} \times \mathbf{p(x_i)}$$

Para uma variável aleatória contínua a obtenção do valor esperado e da variância exige o cálculo de integrais das funções de densidade de probabilidades. Para as distribuições mais importantes as equações encontram-se disponíveis nos livros de estatística, em função dos parâmetros da distribuição, e algumas serão vistas na Unidade 7.

Uma das principais utilidades do valor esperado é na comparação de propostas. Suponha que os valores de uma variável aleatória sejam lucros, ou prejuízos, advindos de decisões tomadas, por exemplo, decidir por uma proposta de compra do cliente A, ou do cliente B. Associados aos valores há probabilidades, como decidir qual é a mais vantajosa? O cálculo do valor esperado possibilita uma comparação objetiva: decidiríamos pela que apresentasse o lucro esperado mais elevado. Há um campo de conhecimento que se ocupa especificamente de fornecer as ferramentas necessárias para tais tomadas de decisão: a teoria estatística da decisão ou análise estatística da decisão.

O valor esperado (média) e a variância apresentam algumas propriedades, tanto para variáveis aleatórias discretas quanto contínuas. O seu conhecimento facilitará muito a obtenção das medidas em problemas mais sofisticados.

Para o valor esperado E(X), sendo k uma constante:

a) $E(k) = k$ A média de uma constante é a própria constante.

b) $E(k \pm X) = k \pm E(X)$ A média de uma constante somada a uma variável aleatória é a própria constante somada à média da variável aleatória.

c) $E(k \times X) = k \times E(X)$ A média de uma constante multiplicada por uma variável aleatória é a própria constante multiplicada pela média da variável aleatória.

d) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$ A média da soma de duas variáveis aleatórias é igual à soma das médias das duas variáveis aleatórias.

e) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$ A média do produto de duas variáveis aleatórias independentes é igual ao produto das médias das duas variáveis aleatórias.

Para a variância V(X), sendo k uma constante:

a) $V(k) = 0$ Uma constante não varia, portanto sua variância é igual a zero.

b) $V(k \pm X) = V(X)$ A variância de uma constante somada a uma variável aleatória é igual apenas à variância da variável aleatória.

c) $V(k \times X) = k^2 \times V(X)$ A variância de uma constante multiplicada a uma variável aleatória é igual ao quadrado da constante multiplicada pela variância da variável aleatória.

d) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias **independentes** $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$ A variância da soma ou subtração de duas variáveis aleatórias independentes será igual à soma das variâncias das duas variáveis aleatórias.

Agora vamos ver um exemplo.

Exemplo 2 – Calcular o valor esperado e a variância da distribuição do Exemplo 1.

Para uma variável aleatória discreta é aconselhável acrescentar mais uma coluna à Tabela 3 com os valores e probabilidades, para poder calcular o valor de $E(X^2)$:

Tabela 3: Distribuição de probabilidades do Exemplo 1 (com coluna $x_i^2 \times p(X = x_i)$).

X	$p(X = x_i)$	$x_i \times p(X = x_i)$	$x_i^2 \quad p(X = x_i)$
0	0,245	0	0
1	0,305	0,305	0,305
2	0,270	0,540	1,08
3	0,180	0,540	1,62
Total	1,0	1,385	3,005

Fonte: elaborado pelo autor.

Substituindo nas expressões de valor esperado e variância:

$$\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(x_i) = 1{,}385 \text{ acertos}}$$

$$\mathbf{V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times p(x_i) - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \times p(x_i)\right]^2 = 3{,}005 - (1{,}385)^2 = 1{,}087 \text{ acertos}^2}$$

$$\mathbf{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}087} = 1{,}042 \text{ acertos}}$$

Observe que o valor esperado (1,385 acertos) é um valor que a variável aleatória não pode assumir! Não é o "valor mais provável", é o ponto de equilíbrio do conjunto. Repare que a unidade da variância dificulta sua comparação com o valor esperado, mas ao se utilizar o desvio padrão é possível verificar que a dispersão dos resultados é quase do valor da média (valor esperado).

Saiba mais...

Sobre Variáveis Aleatórias, BARBETTA, Pedro A.; REIS, Marcelo M.; BORNIA, Antonio C. *Estatística para Cursos de Engenharia e Informática*. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2008, Capítulos 5 e 6.

Sobre as propriedades de valor esperado e variância, BARBETTA, P. A.; REIS, Marcelo M.; BORNIA, Aantonio C. *Estatística para Cursos de Engenharia e Informática*. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2008, Capítulos 5 e 6.

Também sobre variáveis aleatórias, STEVENSON, Willian J. *Estatística Aplicada à Administração*. São Paulo: Ed. Harbra, 2001, Capítulos 5 e 6.

Sobre teoria estatística da decisão: BEKMAN, Oto R.; COSTA NETO, Pedro O. *Análise Estatística da Decisão*. São Paulo: Edgard Blücher, 1980, 4. reimpressão, 2006.

Resumindo

O resumo desta Unidade está demonstrado na Figura 39:

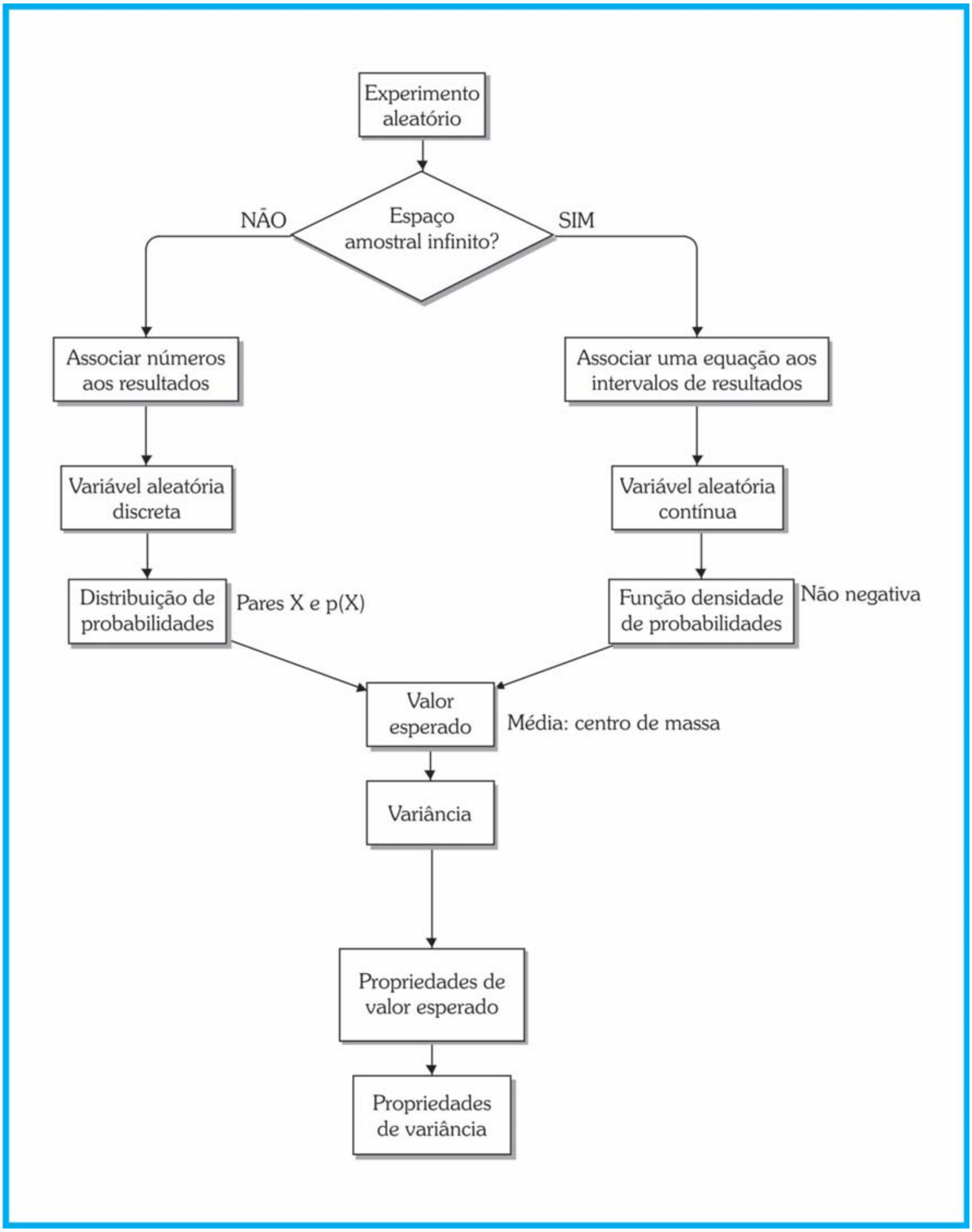

Figura 39: Resumo da Unidade 6.
Fonte: elaborado pelo autor.

Chegamos ao final de mais uma Unidade. Veremos mais sobre os temas abordados na Unidade 7 quando estudarmos várias distribuições de probabilidade (modelos probabilísticos) que são extremamente úteis para modelar muitas situações práticas, auxiliando na tomada de decisões. Esses conhecimentos serão depois aplicados nas Unidades 8 e 9.

Atividades de aprendizagem

1) Três alunos estão tentando independentemente resolver um problema. A probabilidade de que o aluno A resolva o problema é de 4/5, de B resolver é de 2/3 e de C resolver é de 3/7. Seja X o número de soluções corretas apresentadas para este problema.
   a) Construa a distribuição de probabilidades de X. (R.: 0,038; 0,257; 0,476; 0,228); e
   b) Calcule E(X) e V(X). (R.: 1,893; 0,630).
2) Um prédio possui 3 vigias dispostos em vários pontos de onde têm visão do portão de entrada. Se alguém não autorizado entrar, o vigia que o vê faz soar um alarme. Suponha que os vigias trabalham independentemente entre si, e que a probabilidade de que cada um deles veja uma pessoa entrar é 0,8. Seja X o número de alarmes que soam ao entrar uma pessoa não autorizada. Encontre a distribuição de probabilidades de X. (R.: 0,008; 0,096; 0,384; 0,512)